



Title	単一連結 Lie群の空間について
Author(s)	松島, 興三
Citation	全国紙上数学談話会. 1947, 2(5), p. 123-128
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75185
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

50. 単一連結 *Lie* 群の空間について

松 島 興 三 (名大)

E. Cartan は単一連結 *Lie* 群の位相空間としての構造について次の定理を得てゐる。

定理. (Cartan) 単一連結 Lie 群の空間は, euclid 空間と
いくつかの compact な単純 Lie 群の空間の直積に homeomor-
ph である.

(例へば, E. Cartan, *Selecta* P. 245 又は *La topologie
des groupes de Lie*)

この定理の Cartan 自頁による証明は, 彼の symmetric
Riemann space の理論をつかつてあるので (主として小生な
どにとつとは) 理解し難い所が多い. ところが Gantmacher が
(*On the classification of real simple Lie groups, Recueil Math.*, 47, 1939) で real な単純群の分類に
つかつてゐる論法により, symmetric space をつかはずに
すませることが出来る様である. Gantmacher 自頁も, このこ
とについて, 少し注意してゐるが 完全にはやつてゐない様であるか
ら, 以下一応 書いてみることにしたい.

Cartan に書いてある様に, 上の定理は, 次の定理からすぐ出る.
(Cartan l.c.)

定理 simple Lie group g の adjoint group $ad\ g$ の空間は compact linear group の空間と euclid 空間
の直積に homeomorph である.

まず, 次の Lemma をのべる.

Lemma. Φ を skew symmetric な real matrix,
 $A = \exp i \Phi$ とするとき, $\Phi = -i \log A$ となる.

証明. Φ は 適当な行列 T で変換すれば,

$$T \Phi T^{-1} = \begin{pmatrix} \Phi_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \Phi_k & & \\ & & & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \Phi_k = \begin{pmatrix} 0 & -\varphi_k \\ \varphi_k & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{そのとき} \quad T A T^{-1} = \exp i T \Phi T^{-1} = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_k & & \\ & & & I_{2(n-k)} \end{pmatrix}$$

$$2.12 \quad A_k = \begin{pmatrix} a_k & -ib_k \\ ib_k & a_k \end{pmatrix} \quad a_k = \frac{e^{\varphi_k} + e^{-\varphi_k}}{2},$$

$$b_k = \frac{e^{\varphi_k} - e^{-\varphi_k}}{2} \text{ となる.}$$

このとき, $\log T \cdot AT^{-1} = i T \Theta T^{-1}$ となることは, 直接容易にたしかめることが出来る.

しからば, $\log A$ は収斂し, $T^{-1}(\log TAT^{-1})T = i\Theta$ となることは明かである. 以上

定理の証明 1. $\mathfrak{g}$ が complex simple Lie group の場合.

$\mathfrak{g}$ の Lie algebra を $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}$ の compact real form を $\mathcal{L}_0$ とする. $\mathfrak{g}$ の adjoint group $\mathcal{O}$ は $\mathcal{L}$ の automorphism の群の 1 を含む連結成分である. $\mathcal{L}_0$ のそれを $\mathcal{O}_0$ とする. そのとき $A \in \mathcal{O}$ は $A = R \exp i\psi$ と表される.

こゝに, $R \in \mathcal{O}_0$, ψ は $\mathcal{L}_0$ の derivation である.

(Gantmacher L.C §4) 今 A, R, ψ 等を $\mathcal{L}_0$ の定まった基 $\{e_1, \dots, e_r\}$ をとって, 行列により表現したとしよう.

($\{e_1, \dots, e_r\}$ は $\mathcal{L}_0$ の基本二次型式が, $t = \sum_k t^k e_k$ とするとき, $\varphi(t) = -\sum (t^k)^2$ となる様にとっておくとする.)

そのとき, $\varphi(t)$ は, Adj. gr. の不変式であるから R は real orthogonal, ψ は real skew symmetric である.

まづ, A の表示に於て R, ψ は A により, 一意的に定まることを注意しよう. たとへば $R \exp i\psi = R_1 \exp i\psi_1$ となつたとすれば, $R_1^{-1}R = \exp i\psi_1 \cdot \exp(-i\psi)$ conjugate complex をとれば R, ψ 等は real であるから,

$\exp(-i\psi_1) \exp i\psi = \exp i\psi_1 \exp(-i\psi)$ 従つて $\exp i2\psi = \exp i2\psi_1$, 故に Lemma から,

$\psi = \psi_1, R = R_1$ を得る.

今 $A_n \in \mathcal{O}$ とし, $A_n \rightarrow A \in \mathcal{O}$ とする. $A_n = R_n \exp i\psi_n$, $A = R \exp i\psi$ としよう

U_0 は compact であるから $\{R_n\}$ は集積点をもつ。簡単のため $R_n \rightarrow \tilde{R}$ としやう。そのとき、

$$R_n^{-1} A_n = \exp i \psi_n \rightarrow S \exp i \psi = P, \quad S = \tilde{R}^{-1} R.$$

しかるに、 $\exp i \psi_n = (\exp i \psi_n)^* = (\exp i \psi_n)^{-1}$ であるから、 $\bar{P} = R' = P^{-1}$ 、すなはち P は hermitian 且 orthogonal である。従つて P は $P = S \exp i \Phi$, $S_1 \Phi_1 = \Phi_1 S_1$, $S = S_1' = S_1^{-1}$, $\Phi_1' = -\Phi_1$, と表される。(Gantmacher 2.C. ch. 4) 故に、上と同じ論法で、 $S = S_1$, $\psi = \Phi$ とはり S と $\exp i \psi$ は可換になる。 $S \neq E$ とすれば S は -1 なる固有値をもち、 $S \exp i \psi$ の固有値に負のものがあつたが、 $\exp i \psi_n$ の固有値はすべて、正でしかも $\exp i \psi_n \rightarrow S \exp i \psi$ であるから、不可 故に $S = E$, $R = \tilde{R}$ すなはち、

$R_n \rightarrow R$, $\exp i \psi_n \rightarrow \exp i \psi$, 従つて $\log$ をとれば、 $\psi_n \rightarrow \psi$ 故に $U \ni A = R \exp i \psi \mapsto (R, \psi)$ なる対応により、 U_0 (これは compact simple) と euclid 空間の直積に homeomorph である。

2 U が real simple Lie group の場合

real simple なしのは、complex simple なものだ、

complex parameter の実部と虚部を real parameter とみたものか、どちらかである。前者の場合は、1 の場合になるから後の場合を考へやう。

U の Lie algebra を $\mathcal{L}$, その係数を複素数にまで拡大したものを $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}$ の compact real form を $\mathcal{L}_0$ とする。そのとき $\mathcal{L}_0$ は Cartan の定理により (例へば Gantmacher, l.c.) 次の様な real Lie algebra と同型である。まず $\mathcal{L}_0$ のある involutive automorphism $S (S^2 = E)$ をとる。 S は symmetric orthogonal であるから、固有値は ± 1 , $+1$ に対する固有 Vector を $e_1, \dots, e_s$, -1 に対する固有 Vector を $e_{s+1}, \dots, e_r$ とする ($e_i \in \mathcal{L}_0$ にとれる) $\mathcal{L}_0 \cong \mathcal{L}' = \mathbb{R}e_1 + \dots$

($e_i \in \mathcal{L}_0$ にとれる) $\mathcal{L}_1 \cong \mathcal{L}_1 = Pe_1 + \dots + Pe_s + P_i e_{s+1} + \dots + P_i e_r$, 但し P は実数体, $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_1$ と考へてよい. $\mathcal{L}_1$ の *autom* の群の 1 をふくむ連結成分を $\mathcal{O}_{\mathcal{L}_1}$ とする. それが $\mathcal{O}$ の *adjoint group* である. $(e_1, \dots, e_s, i e_{s+1}, \dots, i e_r) = (e'_1, \dots, e'_r)$ とおき, $(e') = (e)T$, 但し $T = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & i & \dots & i \end{pmatrix}$ とする.
 $T^2 = S, \quad \bar{T} = T^{-1}, \quad TS = ST = T^{-1}$

$\alpha \in \mathcal{O}_{\mathcal{L}_1}$ とし, α を (e') なる $\mathcal{L}$ の *basis* で行列に表したものを A' , (e) なる *basis* でのそれを A とすれば, $A = TA'T^{-1}$ であり, A' は *real* である. A の *conjugate complex* の行列を $\bar{A}$ とすれば, $\{e_1, \dots, e_r\}$ が *real* な $\mathcal{L}_0$ の *basis* であることから, $\bar{A}$ は $\mathcal{L}$ の 1 つの *autom* を表してゐることが容易にわかる. しかるに上の関係から,
 $\bar{A} = T^{-1}A'T = STA'T^{-1}S^{-1} = SAS^{-1},$
 $A = R \exp i \psi$ とすれば, $\bar{A} = R \exp(-i \psi) = SR \cdot \exp i \psi S^{-1}$
 $= SRS^{-1} \cdot \exp(i S \psi S^{-1})$ 従つて

$$SR = RS, \quad S \psi S^{-1} = -\psi,$$

逆に, R, ψ が, この性質をもてば, $A = R \exp i \psi \in \mathcal{O}_{\mathcal{L}_1}$,
これを, 言ふには $A' = T^{-1}AT$ が *real* であることが言へればよい. R が S と可換であれば, $T = \frac{1-i}{2} S + \frac{1+i}{2} E$ と表されるから, R と S も可換であり

$$\begin{aligned} A' &= T^{-1}R \exp i \psi T = RT^{-1} \exp i \psi T \\ \bar{A}' &= R \cdot T \exp(-i \psi) T^{-1} \end{aligned}$$

しかるに, $S(\exp i \psi)S^{-1} = \exp(-i \psi)$ だから, 左から T , 右から T^{-1} をかければ

$T^{-1}(\exp i \psi)T = T(\exp i \psi)T^{-1}$ であるから, $A' = \bar{A}'$ である. 故に, $A \in \mathcal{O}_{\mathcal{L}_1}$ と S と可換な $\mathcal{L}_0$ の *autom*, $R, S \psi S^{-1} = -\psi$ なる $\mathcal{L}_0$ の *derivation* ψ が 1 対 1 に対応する. しかるに S と可換な *autom* の全体は明かに, *compact linear group* であり $S \psi S^{-1} = -\psi$ なる ψ は *linear space* をつくるから $A \rightleftharpoons (R, \psi)$

により、 O_2 は *compact linear group* の空間と、*euclid*
空間の直積と *homeomorph* である。

1947.5.6