OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	部分群の作る束が上半もぢゅらナル有限群
Author(s)	佐藤, 正治
Citation	全国紙上数学談話会. 1947, 2(5), p. 128-130
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75186
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

51. 部分群の作る束が上半もぢゅら なる有限群

阪大　　佐藤　正次

有限群 $\mathfrak{G}$ の部分群全部の作る束 $L(\mathfrak{G})$ が modular なる場合を 岩澤氏[1]が決定して居られますが、此の場合 $\mathfrak{G}$ を特徴づける本質的な事柄は大部分 $L(\mathfrak{G})$ が上半もぢゅら束は ausgeglich なる事及び 一般の有限群に於て 部分群 $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ が $(\mathfrak{A})=a$, $(\mathfrak{B})=b$ $(a,b)=1$ （但、$(\ )$ は位数を示す） とすれば $(\mathfrak{A}\sim\mathfrak{B}) \geqq ab$, $ab \mid (\mathfrak{A}\sim\mathfrak{B})$ なる事、及 nilpotent な有限群は常に、下半もぢゅら なる事、を用ふるならば 岩澤氏の論文の Hilfssatz 3 — 10 が殆ど同じ形で 上半もぢゅら群（之の様に命名します）について成立する事が分ります。

但 Hilfssatz 8. の証明は少し複雑になります 方針は上論文と同様です。Hilfssatz 10. は次の様に変形しないと成立しません。

“$\mathfrak{G}$ を上半もぢゅら群 $(\mathfrak{G})=p^{\alpha}q^{\beta}$, $p>q$. p,q は素数 とし二つの q-Sylow 群 $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2$ があれば $P \in \mathfrak{G}$. $P^p=1$ $P\mathfrak{Q}_1P^{-1}=\mathfrak{Q}_2$ なる元 P が存在する” 即ち $(\mathfrak{G})$ が二種類の素数の巾積なる事が必要です。此れが Hilfssatz 11, 13 の成立しない原因になります。

以上により次の定理が成立します。

定理 1, $(\mathfrak{G})=p^{\alpha}q^{\beta}$ $p>q$ p,q は素数なる non-nilpotent な群 $\mathfrak{G}$ は次の条件を満足する時 且その時に限り、上半もぢゅらである。

1). P-Sylow 群は elementary Abelean : $(P,\cdots\cdots,P)$ 型 $\mathfrak{P}$ と書く

2). q-Sylow 群は cyclic $\mathfrak{Q}=\{Q\}$.

3). 任意の $P \in \mathfrak{P}$ に対し

$$QPQ^{-1}=P^{r};\quad r \text{ は } \mathfrak{G} \text{ のみにより（} Q \text{ を固定すれば）}$$

一意的に定まる常数で $r \not\equiv 1 \mod p$, $r^{\beta'} \equiv 1 \mod p$.
但 $1 \leqq \beta' \leqq \beta$. β' は $\mathfrak{G}$ のみで定まる. 勿論上の合同式を満足する最小のものを β' とするのである. 特に $\beta' = 1$ なる時 $L(\mathfrak{G})$ は下半もぢゅら 従って $\mathfrak{G}$ は M-群 になります.

注意 $\mathfrak{G}$ の q-Sylow 群の二つの mean の内で maximal な位数を持つものは. 全ての q-Sylow 群に共通で 位数は $q^{\beta-\beta'}$.
一般の位数を持つ群が 上半もぢゅら なる時に直積に分解するには 岩澤氏の論文の Hilfssatz 12 に対応するものだけが成立します. 証明は全く同様です. 即ち "$\mathfrak{G}$ を 上半もぢゅら $[\mathfrak{G}] = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3}$ $p_1 > p_2 > p_3$ 素数, $\mathfrak{P}_i$ を p_i-Sylow 群 とする時 若し $\mathfrak{P}_1 \sim \mathfrak{P}_2$ が non-nilpotent ならば $\mathfrak{P}_1 \sim \mathfrak{P}_3$ 及 $\mathfrak{P}_2 \sim \mathfrak{P}_3$ は共に nilpotent になる" 此れを用ひて任意の位数の上半もぢゅら群 $\mathfrak{G}$ を直積に分解すれば 其の直既約な non nilpotent な因子は.

$(\mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{P}_2 \times \cdots\cdots \times \mathfrak{P}_r) \mathfrak{Q}$ (こゝで $\mathfrak{P}_i$, $\mathfrak{Q}$ は $\mathfrak{G}$ の p_i-Sylow 群. q-Sylow 群である) なる型で $\mathfrak{P}_i \sim \mathfrak{Q}$ は全て定理 1 に受へられた構造を有する事は直ちに解ります.
扨上の如き構造の位数が $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots\cdots p_r^{\alpha_r} q^{\beta}$ $\cdot$ $p_1 > p_2 > p_3 > \cdots > p_r > q$. なる群が 上半もぢゅら. なる為の必要充分な條件は 各 $\mathfrak{P}_i \sim \mathfrak{Q}$ に於て定理 1 に於る $p_i^{q^{\beta_i'}} \equiv 1 \mod p_i$, $1 \leqq \beta_i' \leqq \beta$ を受へる. β_i' について $\beta_i' \not\equiv \beta_j'$ $(i \neq j)$ が成立する事である. 証明は容易ですが長くなりますから略します.

以上により 上半もぢゅら な有限群は完全に決定されました. 即ち

定理 2. 有限群 $\mathfrak{G}$ が 上半もぢゅら なる為の完全條件は. 次の様な様な構造を有する事である.
$\mathfrak{G} = \mathfrak{N}_1 \times \mathfrak{N}_2 \times \cdots\cdots \times \mathfrak{N}_u \times R_1 \times R_2 \times \cdots\cdots \times R_s$ 各因子の位数は互に素 ここで R_i は r_i-Sylow 群 ($\mathfrak{G}$ の) で上半もぢゅう 即ち もぢゅう なるもの [岩澤氏の論文参照] $\mathfrak{N}_i$ は下の様な構造を有す. 代表的に $\mathfrak{N}$ と書いて

$\mathfrak{N} = (\mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{P}_2 \times \cdots\cdots \times \mathfrak{P}_j) \mathfrak{Q}$ $[\mathfrak{N}] = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots\cdots p_j^{\alpha_j} q^{\beta}$ $p_i > q$ $i = 1, \cdots\cdots, j$. $p_i \not\equiv p_{i_1}$ $(i \neq i_1)$ $\mathfrak{P}_i$, $i = 1, \cdots\cdots, j$. 之は全て $\mathfrak{G}$ の Sylow 群で

1). $\mathfrak{P}_i$ は全て elementary abelean

2). $\mathfrak{Q}$ は cyclic $= \{Q\}$.

3). $\mathfrak{P}_i \sim \mathfrak{Q}$ は全て non-nilpotent で

任意の $P_i \in \mathfrak{P}_i$ に対し $QP_iQ^{-1} = P_i^{r_i}$. なる r_i は $\mathfrak{P}_i$ 及び i のみに（Q を固定すれば）depend する常数で $r_i \not\equiv 1 \bmod p_i$

$r_i^{\beta_i'} \equiv 1 \bmod p_i \quad 1 \leqq \beta_i' \leqq \beta$

但 β_i' は r_i に対して上の如き関係の成立する最小のものとする

4). $\beta_m' \neq \beta_n' \quad (m \neq n)$

註1. — 岩澤氏：Über die endlichen Gruppen u. die Verbände ihrer Untergruppen

東大理科報告 1941.

（1947. 5. 7）