



Title	部分群の作る束が上半もぢゅらナル有限群
Author(s)	佐藤, 正治
Citation	全国紙上数学談話会. 1947, 2(5), p. 128-130
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75186
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

51. 部分群の作る束が上半もちゅうらなる有限群

阪大 佐藤 正次

有限群 G の部分群全部の作る束 $L(G)$ が *modular* なる場合を 岩澤氏¹⁾が決定して居られますが、此の場合 G を特徴づける本質的な事柄は大部分 $L(G)$ が 上半もちゅうら束は *ausgeglichen* なる事及び 一般の有限群に於て 部分群 O_2, O_3 が $[O_2] = a, [O_3] = b$ $(a, b) = 1$ (但、 $()$ の位数を示す) とすれば $[O_2 \sim O_3] \cong ab, ab \mid [O_2 \sim O_3]$ なる事、及 *nilpotent* な有限群は常に、下半もちゅうらなる事、を用ふるならば 岩澤氏の論文の *Hilfssatz* 3 — 10 が殆ど同じ形で 上半もちゅうら群 (この様に略稱します) について成立する事が分ります。

但 *Hilfssatz* 8. の証明は少し複雑になります 方針は上論文と同様です. *Hilfssatz* 10. は次の様に変形しないと成立しません.

“ G を 上半もちゅうら群 $[G] = P^a Q^b, P > Q, P, Q$ は素数 とし 二つの Q -Sylow 群 $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2$ があれば $P \in G, P^P = 1, P \mathfrak{Q}_1 P^{-1} = \mathfrak{Q}_2$ なる元 P が存在する ” 即ち $[G]$ が二種類の素数の 17 種なる事が必要です. 此れが *Hilfssatz* 11, 13 の成立しない原因になります.

以上により次の定理が成立します.

定理 1. $[G] = P^a Q^b, P > Q, P, Q$ は素数なる *non-nilpotent* な群 G は次の条件を満足する時 且その時に限り、上半もちゅうらである.

- 1). P -Sylow 群は *elementary Abelian* : $(P, \dots, P)$ 型 $\mathfrak{P}$ と書く
- 2). Q -Sylow 群は *cyclic* $\mathfrak{Q} = \{Q\}$.
- 3). 任意の $P \in \mathfrak{P}$ に対し

$$QPQ^{-1} = P^r; \quad r \text{ は } G \text{ のみにより } (Q \in \text{固定すれば})$$

一意的に定まる常数で $r \neq 1 \pmod{p}$, $rg^{\beta} \equiv 1 \pmod{p}$.

但 $1 \leq \beta' \leq \beta$. β' は G のみで定まる. 勿論上の合同式を満足する最小のものを β' とするのである. 特に $\beta' = 1$ なる時 $L(G)$ は 上半もちゅうら 従つて G は M -群 になります.

注意 G の g -Sylow 群の二つの *mean* の内で *maximal* な位数を持つものは. 全ての g -Sylow 群に共通で 位数は $g^{\beta-\beta'}$. 一般の位数を持つ群が 上半もちゅうら なる時に直積に分解するには 岩澤氏の論文の *Hilfsatz 12* に対応するものだけが成立します. 証明は全く同様です. 即ち “ G は 上半もちゅうら $[G] = p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3}$ $p_1 > p_2 > p_3$ 素数, φ_i を p_i -Sylow 群 とする時 若し $\varphi_1 \cup \varphi_2$ が *non-nilpotent* ならば $\varphi_1 \cup \varphi_3$ 及 $\varphi_2 \cup \varphi_3$ は共に *nilpotent* になる” 此れを用ひて任意の位数の上半もちゅうら 群 G を直積に分解すれば 其の直既約な *non nilpotent* な因子は.

$(\varphi_1 \times \varphi_2 \times \cdots \times \varphi_r)^{g^{\beta}}$ (こゝで φ_i は G の p_i -Sylow 群. g -Sylow 群である) なる型で φ_i は全て定理 1 に受へられた構造を有する事は直ちに解ります.

扱上の如き構造の倍数が $p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r} g^{\beta}$ $p_1 > p_2 > p_3 > \cdots > p_r > g$. なる群が 上半もちゅうら なる爲の必要充分な條件は

各 φ_i は 1 に於て定理 1 に於る $rg^{\beta_i} \equiv 1 \pmod{p_i}$ $1 \leq \beta_i \leq \beta$ を受へる. β_i について $\beta_i \neq \beta_j$ ($i \neq j$) が成立する事である.

証明は容易ですが長くなりますから略します.

以上により 上半もちゅうら な有限群は完全に決定されました. 即ち

定理 2. 有限群 G が 上半もちゅうら なる爲の完全条件は. 次の様な様な構造を有する事である.

$G = Q_1 \times Q_2 \times \cdots \times Q_r \times R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_s$ 各因子の位数は互に素 ここで R_i は p_i -Sylow 群 (G の) で 上半もちゅうら 即ち もちゅうら なるもの [岩澤氏の論文] Q_i は下の様な構造を有す. 代表的に Q_i と書いて

$Q_i = (\varphi_1 \times \varphi_2 \times \cdots \times \varphi_j)^{g^{\beta}}$ $[Q_i] = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_j^{a_j} g^{\beta}$ $p_i > g$ $i=1, \dots, s$ $p_i \neq p_j$ ($i \neq j$) φ_i , $i=1, \dots, j$. 全て G の Sylow 群で

1). φ_i は全て elementary abelian

2). $\mathcal{A}$ は cyclic = $\{Q\}$.

3). $\varphi_i \cup \mathcal{A}$ は全て non-nilpotent と

任意の $P_i \in \varphi_i$ に対し $Q P_i Q^{-1} = P_i f_i$ なる f_i は Q 及び

のみは (Q を固定すれば) depend する 常数で $f_i \equiv 1 \pmod{p_i}$

$$f_i^{p_i^{\beta_i}} \equiv 1 \pmod{p_i} \quad 1 \leq \beta_i \leq \beta$$

但 β_i は f_i に対して上の如き関係の成立する 最小のものとする.

4). $\beta'_m \neq \beta'_n \quad (m \neq n)$

註 1. — 岩澤氏: Über die endlichen Gruppen u.

die Verbände ihrer Untergruppen

東大理科報告 1941.

(1947.5.7)