



Title	全微分方程式ノ積分ニ就テ（Ⅲ）
Author(s)	占部, 實
Citation	全国紙上数学談話会. 1947, 2(5), p. 130-134
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75187
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

52. 全微分方程式ノ積分ニ就テ. (Ⅲ)

(大島文理大) 占 部 賢

§7. Naitain ノ方法トノ關係

$$\Omega \equiv X_i dx^i \quad (7.1).$$

$$= \text{於テ } \left. \begin{aligned} \dot{x}_p^\lambda &= x^{\lambda-1} \text{ for } \lambda \leq p \\ \dot{x}_p^\lambda &= x^{\lambda+p} \text{ for } \lambda > p \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &(p=1, 2, \dots, n-1) \\ &(\lambda=2, 3, \dots, n-1) \end{aligned}$$

ナル如クエラフ。点 $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$ ノ座標ハ次ノ如ク書クコト
ガ出来ル。

$$\left. \begin{aligned} P_0 : & x_0^1, x_0^2, x_0^3, x_0^4, \dots, x_0^{n-2}, x_0^{n-1}, x_0^n \\ P_1 : & x_1^1, x_1^2, x_1^3, x_1^4, \dots, x_1^{n-2}, x_1^{n-1}, x_1^n \\ P_2 : & x_2^1, x_2^2, x_2^3, x_2^4, \dots, x_2^{n-2}, x_2^{n-1}, x_2^n \\ \vdots & \\ P_{n-2} : & x_{n-2}^1, x_{n-2}^2, \dots, x_{n-2}^{n-2}, x_{n-2}^{n-1}, x_{n-2}^n \\ P_{n-1} : & x_{n-1}^1, x_{n-1}^2, \dots, x_{n-1}^{n-2}, x_{n-1}^{n-1}, x_{n-1}^n \end{aligned} \right\} \quad (7.3)$$

此時 條件 Δ ノ Δ ヲ作レバ Δ ハ符号ヲ除イテ次ノ如クナル。

$$\Delta = x_2 x_3 \dots x_{n-1} \quad (7.4)$$

サテ $\Omega = 0$ が *integrable* ナル時, 例へバ $X_1 = 0$ ナラバ
 $\Omega = 0$ の *integral* ヲ $\varphi(x) = \text{const.}$ トスレバ $\frac{\partial \varphi}{\partial x^1} = 0$
 $\therefore \varphi(x) = \text{const.}$ スル *integrating factor* ヲ入トスレバ λX_i
 $= \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$ ニシテ右辺ハ x' ヲ含マヌ故 $X_2 : X_3 : \dots : X_n$ ハ x' ヲ
 含マナイ。即チ x' ハ各項ノ *common factor* トシテノミハ入ッテ
 キル。依テ $\Omega = 0$ = 於テ此ノ *common factor* ヲ除ケバ結局 Ω
 ハ x' ヲ全然含マヌコトナル。即チ $X_1 = 0$ ナラバ $\Omega = 0$ ハ x' ヲ全然
 含マヌ $X_2 dx^2 + \dots + X_n dx^n = 0$ = 帰着セシメルコトガ出来ル。
 依テ $\Omega = 0$ = 於テ X_i ノ中 0 ノモノガ若干個アレバ, *common*
factor ヲ除ケバ $\Omega = 0$ ハ 夫等ノ X_i = 対応スル x^i ヲ含マヌ方
 程式=ナリ。残リノ X_i ハ全部 0 デナクナル。⁽¹⁾ 依テ *integrable*
 ナ方程式 $\Omega = 0$ ヲ問題トスル限リ最初ヨリ上ノ *reduction* ガ行
 ハレタモノト考ヘテ, スベテノ X_i ハ 0 デナイトシテヨイ。我々ハ以
 下ニ於テハ此假定ノモトニ議論ヲ進メル。然ルトキ (7.4) ヨリ $\Delta \neq 0$
 依テ (7.2) ノ如クエラバレタ $\hat{\chi}_p$ ハ条件 Δ ヲ満足スル。

然ルトキ § 6. ノ f_p ハ $\hat{\chi}_p$ 次式ニヨリテ決定サレル。

$$X_p dx^p + X_{p+1} dx^{p+1} = 0 \quad (p = 1, \dots, n-1) \quad (7.5)$$

$$(x^1, \dots, x^{p-1}, x^{p+2}, \dots, x^n = \text{const.})$$

而モ f_p ハ $\hat{\chi}_p$ = 独立デナケレバナラヌ。即チ f_p ハ (7.5) ノ *integ-*
ral = シテ少クトモ x^p, x^{p+1} ノ中何レカヲ含ムモノデナケレバナラヌ
 コレハ $X_p, X_{p+1} \neq 0$ ヨリ可能デアル。然ルトキ (6.20) ハ
 (7.3) ノ表ヨリ次ノ如クナル。

$$\left. \begin{aligned} f_1(x_0^1, x_0^2, x_0^3, \dots, x_0^n) &= f_1(x_1^1, x_1^2, x_0^3, \dots, x_0^n) \\ f_2(x_1^1, x_1^2, x_0^3, \dots, x_0^n) &= f_2(x_1^1, x_2^2, x_2^3, x_0^4, \dots, x_0^n) \\ f_{\frac{n-1}{2}}(x_1^1, x_2^2, \dots, x_{\frac{n-2}{2}}^{\frac{n-2}{2}}, x_{\frac{n-2}{2}}^{\frac{n-1}{2}}, x_0^n) &= f_{\frac{n-1}{2}}(x_1^1, x_2^2, \dots, x_{\frac{n-2}{2}}^{\frac{n-2}{2}}, x_{\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}}, x_{\frac{n-1}{2}}^n) \end{aligned} \right\} \quad (7.6)$$

(1) $\Omega = 0$ = 於テ $X_i = 0$ ナラバ x^i ガ *common factor* ト
 シテノミハ入ッテキルトイフコトハ $\Omega = 0$ が *integrable* ナ
 ルタメノ一ツノ必要條件デアル。

(6.20)ヨリ $x_1^i, x_2^i, \dots, x_{n-2}^i$ ヲ消去スルコトハ (7.6)=於テハ $x_1^2, x_2^3, \dots, x_{n-2}^{n-1}$ ヲ消去スルコトデアル。若シ $\Omega=0$ ガ *integrable* ナラバ §6.ノ一般論=ヨリ (7.6)ヨリ $x_1^2, x_2^3, \dots, x_{n-2}^{n-1}$ ヲ消去セル結果ハ次ノ形トナル。

$\phi(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n) = \phi(x_1^1, x_2^2, \dots, x_{n-1}^{n-1}, x_n^n)$ (7.7)
ソシテ此時得ラレタ $\phi(x) = \text{const.}$ ガ求ムル $\Omega=0$ ノ *integral* トナル。

(7.6)=於テ x_0^i ノ代リ= x^i ト書き, $x_1^1, x_2^2, \dots, x_{n-1}^{n-1} = \text{special value}$ ヲアタヘ, $x_n^n = C$ ($C = \text{const.}$) トオキ (7.7)ヲ $C =$ ツイテ解ケバ

$$F(x) \equiv F(\phi(x), x_1^1, x_2^2, \dots, x_{n-1}^{n-1}) = C \quad (7.8)$$

此處デ $x_1^1, x_2^2, \dots, x_{n-1}^{n-1}$ ハ 常数デ $\phi(x) = \text{const.}$ ハ $\Omega=0$ ノ *integral* デアルカラ $F(x) = C$ ガ又 $\Omega=0$ ノ *integral* トナル。サテ $f(x_1^1, \dots, x_{n-1}^{n-1}, C) = C'$ トオケバ $C' = \text{const.}$ トナル。是= (7.8)ヲ代入シ

$$\psi(x) \equiv f(x_1^1, x_2^2, \dots, x_{n-1}^{n-1}, F(x)) = C' \quad (7.9)$$

トスレバ $F(x) = \text{const.}$ ガ *integral* デアルカラ

$\psi(x) = \text{const.}$ ガ又 $\Omega=0$ ノ *integral* トナル。即チ (7.6)ノ最後=於テ。

$$f(x_1^1, x_2^2, \dots, x_{n-2}^{n-2}, x_{n-2}^{n-1}, x_0^n) = C' \quad (7.10)$$

トオキ $x_1^1, x_2^2, \dots, x_{n-2}^{n-2} = \text{special value}$ ヲアタヘ,

$x_1^2, x_2^3, \dots, x_{n-2}^{n-1}$ ヲ消去シテ得タル式ヲ $C =$ ツキ解ケバ $\psi(x) = C'$ ヲ得ル。此時 $\psi(x) = \text{const.}$ ガ $\Omega=0$ ノ *integral* トナル。是 Nataniノ方法デアル。⁽¹⁾

サテ $\Omega=0$ ガ *integrable* デナイ場合ハ⁽²⁾ §6.ノ一般論=依リ (7.0)ヨリ $x_1^2, x_2^3, \dots, x_{n-2}^{n-1}$ ヲ消去セル結果ノ式ハ次ノ形デアツテ

(1) Forayth, Theory of Diff. Eqs. I. p.27-30.

(2) スベテノ X_i キ0 ナル仮定ハ破シテオク。

$$\Phi(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n; x_1^1, x_1^2, \dots, x_{n-1}^{n-1}, x_{n-1}^n) = 0 \quad (7.11)$$

是ハ決シテ (7.7) ノ形トハナラナイ。然シ *Natain* ノ方法ニ於ケルガ如ク $x_1^1, x_1^2, \dots, x_{n-1}^{n-2}, x_{n-1}^{n-1} = \text{special value}$ ヲアタヘ、 $x_{n-1}^n = C$ トシテ (7.11) ヲ C ニツキ解ケバ次ノ形ノ式ガ得ラル。

$$F'(x_0) = C.$$

$f_{n-1}(x_1^1, \dots, x_{n-1}^{n-1}, C)$ C' トスル時

$$\psi(x_0) \equiv f_{n-1}(x_1^1, x_1^2, \dots, x_{n-1}^{n-1}, F'(x_0)) = C'$$

トナル。 x_0^i ヲ x^i ト書ケバ $\psi(x) = C'$ 。是ハ一見 $\Omega = 0$ ノ *integral* ノ如キ形ヲシテキルガ、(7.11) ガ (7.7) ノ形トナラナイノデアルカラ $\psi(x)$ ハ $\Omega = 0$ ガ *integrable* ノ時、 $\psi(x) \equiv f_{n-1}[x^1, \dots, x_{n-1}^{n-1}, F(\phi(x), x^1, \dots, x_{n-1}^{n-1})]$
 $= \text{function of } \{\phi(x), x^1, \dots, x_{n-1}^{n-1}\}$ ノ形トハナラナイ。 $\psi(x) = C'$ ハ結局 (7.11) ノ單ナル変形デアッテ、決シテ $\Omega = 0$ ノ *integrable* トイフ意味ハナイノデアル。カク *Natain* ノ方法ニアリテハ演算ノ結果ハ *integrable* ナル場合モ 然ラザル場合モ常ニ同一ノ形ノ式ヲ得、結果ノ式ダケデハ $\Omega = 0$ ガ *integrable* ナリヤ否ヤハ判定出来ナイ。然シ上述ノ議論ヨリ明ラカナル如ク $x_1^1, x_1^2, \dots, x_{n-1}^{n-1} = \text{special value}$ ヲアタヘズ、常数トシテソノママ文字ヲ残シ消去ヲ実施スル時ハ §6. ノ一般論ヨリ消去サレタ結果ガ (7.7) ノ形トナルトキハ *integrable* デアリ、然ラザル時ハ *non integrable* ナルコトガ分ル。

以上ノ議論ヨリ *Natain* ノ方法ハ *Reymond* ノ方法ニ於テ $\sum_p^{\lambda}$ トシテ (7.2) デアタヘラレル如キ函数ヲ取ツタ特別ノ場合デアルコトガ分ツタ。

§6ニ於テ F_p ヲ (6.27) デ定義スル方法ニ於テ 特ニ $\sum_p^{\lambda} = x^{x+p}$ トスレバ f_p ハ次式ノ積分トナル。

$$X_1 d\lambda^1 + X_{p+1} d\lambda^{p+1} = 0 \quad (p=1, 2, \dots, n-1) \quad (7.12)$$

此場合ノ議論ハ(7.5)ノ場合ノ議論ト全ク同様デアル。從テ是ヨリ Natani ノ方法ト同様ナーツノ解法ガ得ラレル。然シ其ハ本質的ニハ Natani ノ方法ト異ナルモノデハナイカラ議論ハ一切省略スル。

Natani ノ方法ニ依リテハ x_0^i ノ代リニ x^i ト書キ, $x_{n-1}^n (=x_1^1)$, $x_{n-1}^2 (=x_2^2)$, $\dots\dots\dots$, $x_{n-1}^{n-1} = \text{special value}$ ヲアタヘ, $x_{n-1}^n = C$ トオキ, 消去式ヲ(7.7)ノ形ニ變形シテ *integral* ヲ求メル代リニ, 消去式ヲCニツキ解キ *integral* ヲ求メテキル。此方法ハ一般ノ *Reymond* ノ方法ニモ適用セラレルコトハ明ラカデアル。何トナレバ(7.7)ヨリ(7.8)ニ至ル過程ハ一般ノ *Reymond* ノ方法ニツイテモアテハマルカラデアル。但シ勿論是ガ許サレルノハ $\Omega=0$ ガ *integrable* ナル場合ニ限ラレテキルコトハ(7.11)ニ就テ論ジタ事ヨリ明ラカデアル。