



Title	等距離集合に就て II
Author(s)	津田, 丈夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1947, 2(6), p. 135-139
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75188
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

53. 等距離集合に就て (II)

津 田 大 夫

此處で述べたいことは切線が正則点で連続であること及曲線 E の長さを $\ell(E)$ と書くとき $\lim_{n \rightarrow 0} \ell(E(n)) = \ell(E)$ であることが云ひ得ることである。

$x \in E(n)$ に對して $x \in \text{Front} \cup (x', n)$ $x' \in E$ なるとき $x \leftrightarrow x'$ が對應すると云ふ。そして $E(n) \ni x \leftrightarrow x' \in E$ とかく。又 $\Delta(n) = E \cap (E(n) \ni x \rightarrow x' \in E)$ と書く。又 $\Delta = \sum_{a > n > 0} \Delta(n)$ とおくと、次の命題によつて Δ は a と無關係なことが判る。

$n < n'$ であれば $\Delta(n) \supseteq \Delta(n')$ である。

$A \in \Delta(n')$ とすると $B \in E(n')$ が存在して $\text{dis}(A, B) = a'$ となる。

又 $C \in \overline{AB}$ $\text{dis}(A, C) = n$ とす。 $C \in E(n)$ とすれば $\frac{\text{dis}(C, x)}{x \in E}$ なる x が存在せねばならぬ。そこで $\text{dis}(B, x) < \text{dis}(B, C) + \text{dis}(x, C) < (n - n) + n = n'$ 然るに $\text{dis}(B, x) \geq \text{dis}(B, E) = n$ にちぢゆんする。故に $C \in (n)$ 故に $\text{dis}(C, A) = n$ より $A \in \Delta(n)$ 故に。

$\Delta(n) \supseteq \Delta(n')$

$\Delta(n)$ は有界閉集合である。

$P_n \in \Delta(n)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) $P_n \rightarrow P$ とする。さて $\Delta(n) \ni P_n \rightarrow q_n \in E(n)$ $\text{dis}(P_n, q_n) = n$ 。さて $E(n)$ は有界閉集合なる故 *Bolzano-Weierstrass* の定理によつて $\{q_n\}$ の部分列 $\{q_{n_k}\}$ ($k = 1, 2, \dots$) 然も $q_{n_k} \rightarrow q$ である。さて $P_{n_k} \rightarrow P$ ところで容易に判るが $\text{dis}(P, q) = n$ となる。即ち $q \in \Delta(n)$ 即ち $\Delta(n)$ は閉集合である。

さて E が *Jordan* 閉曲線なるとし Γ と書くことにする。すると次が成立する。

Δ は Γ に於て稠密である。

[証明] $A \in \Gamma$ に對し任意の近衛 $U(A, \rho)$ を作る。それに對し $U(A, \frac{\rho}{2})$ を作り $B \in U(A, \frac{\rho}{2}) \cap C[\Gamma]$ $C[\Gamma]$ とは Γ の内部領域 $C[\Gamma]$ とは Γ の外部とする。又 B と ∞ を連続曲線 Λ で結ぶ。但し Λ は $C[\Gamma]$ に

属す. $dis(A, P) = \alpha \leq dis(A, B) < \frac{\rho}{2}$ である. さて $\delta < \max(dis(A, P), \frac{\rho}{2})$ をとり $P(\delta)$ を考える. すると $P(A)$ は円 $U(A, \rho)$ を二分する. 然して A, B はその異なる部分に属す. 然も $\overline{AB}$ は全く $U(A, \rho)$ に属す. 故に $\overline{AB}$ と $P(\delta)$ とは必ず交る. その点を D とせば $P(\delta) \ni D \rightarrow C \in \Delta(\delta) \subset \Delta$. $dis(A, C) \leq dis(A, D) + dis(D, C) \leq dis(A, B) + \delta < \frac{\rho}{2} + \frac{\rho}{2} = \rho$ 即任意の $\rho > 0$ に對して $\Delta \ni C$ が存在し $U(A, \rho) \ni C$ となる. 即 Δ は P に於て稠密である. (証明完了)

あとの $\lim_{n \rightarrow \infty} l(P(n)) = l(P)$ を示すためには $l(\Delta) = l(P)$ ではないかと思つてみたのですが次の例を近藤先生が與へられました.

[0.1] 区間を分割する. 先づ $[0, 1]$ の中に長さ u_0 の区間 u_0 を一つとる. せして 0 と u_0 のため区間を I_0 とし, 1 と u_0 のもの区間を I_1 とする. 次は I_0, I_1 の中に一つずつ u_2 をとる. せして I_0 の u_1 の左の区間を I_{00} とし右の区間を I_{01} とする. I_1 の u_1 の左側の区間を I_{10} , 右側の区間を I_{11} とする. 以下同様にする. せして u_k の上の高さ V_k の細い大形を作る. 但し $V_k = u_k \cdot c/2^k(k+1)^2$ とすれば確かに $[0, 1]$ 上の点は此の曲線 P の Δ には含まれないことが判る. 此のとき P の長さは有界であり $P - \Delta$ の linear measure は勿論零でない.

定理 2 P を單一 Jordan 閉曲線とする. かつ $l(P) < +\infty$ とするとき $\lim_{n \rightarrow \infty} l(P(n)) = l(P)$

[証明] Δ は P に於いて稠密なる故その中に点 $P_1, P_2, \dots, P_n$ をとり, $|l(P) - l((P_i)_n^m)| < \epsilon$ を 示さしめうる. 但し $\epsilon > 0$ は与えられてゐるものとし, $(P_i)_n^m$ とは (多角形 $P_1, P_2, \dots, P_n$) を略記したものである. $\Delta \ni P_i$ に對して n_i が定まり $\Delta(n_i) \ni P_i$ 故に $\min(n_1, n_2, \dots, n_n) = n$ とおくと $\Delta(n) \ni P_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) さて P_i に對して $P(n)$ 上は q_i をとる. その上 $q_{n+1}, q_n, \dots, q_m$ を新にとつて $|l(P(n)) - l((q_i)_n^m)| < \epsilon$ としよ. さて $q_{n+1}, \dots, q_m$ に對應する P の点を $P_{n+1}, \dots, P_m$ とするとき, $l(P) > l((P)_n^m) > l((P)_n^m)$ よつて $|l(P) - l((P)_n^m)| < \epsilon$ さて $(q_i)_n^m(n) \subset (P_i)_n^m(n)$ と $P(n)$ の長さの関係を見るに $(q_i)_n^m(n) \ni P$

$(j=1, 2, \dots, m)$ 法も $(P_i)^m$ は P_j を頂点とする多角形である、故に
 $\ell\{(q_i)^m(\Omega)\} > \ell((P)^m)$ である。さて次に $(q_i)^m(\Omega)$ の P_i と P_{i+1} の
 部分を一つとつてくると、 P_i から A 迄が円弧、それを $\widehat{P_i A}$ 、次に A より B 迄
 が場合、それを $\overline{AB}$ 、次に B より P_{i+1} 迄が円弧、それを $\widehat{B P_{i+1}}$ とあらわす
 さて A 及び B に対して $\overline{AB}$ に垂線を立て $\Gamma(\Omega)$ と交る点を A', B' とする。する
 と、 $\Gamma(\Omega) \cap \widehat{P_i A}^{B'}$ (即ち $\Gamma(\Omega)$ の A', B' の間の弧) は一般に直線でない。又直
 線であれば $\overline{AB}$ は 平行四辺形の対辺であるから長さが等しい。いづれにしても
 $\ell(\Gamma(\Omega) \cap \widehat{P_i A}^{B'}) \geq \ell(\overline{AB})$ 、次に $\Gamma(\Omega) \cap \widehat{P_i A}^{A'}$ と $\widehat{P_i A}$ との比較であるが $\widehat{P_i A}$
 は $\cup(q_i, \Omega)$ の *Front* の点であるが $\Gamma(\Omega)$ は $\cup(q_i, \Omega)$ の内部の点ではない
 ことに注意する。そこで q_i, A, A' が一直線上にある。さて $\widehat{P_i A}$ 上に点
 $M_1, M_2, \dots, M_k$ をとり $q_i M_i$ が $\Gamma(\Omega)$ との交点を $N_1, N_2, \dots, N_k$ とする。さて
 $\varepsilon > 0$ に対して上の様に M を適当にとると、 $|\ell(\widehat{P_i A}) - \ell(M_i)^k| < \varepsilon$ とならし
 めうる。さて $N_k \in \Gamma(\Omega)$ は円 $\cup(P_i, \Omega)$ の外にある故に $\ell(N_k, N_{k+1})$
 $\geq \ell(M_k, M_{k+1})$ ($k=1, 2, \dots, k$)、そこで $\ell(\Gamma(\Omega) \cap \widehat{P_i A}^{A'}) \geq \ell((N_j)^k) \geq \ell((M_j)^k)$
 $\geq \ell(\widehat{P_i A}) - \varepsilon$ 。 ε は任意であるから結局 $\ell(\Gamma(\Omega) \cap \widehat{P_i A}^{A'}) \geq \ell(\widehat{P_i A})$ を得る。
 よって結局 $\ell(\Gamma(\Omega) \cap \widehat{P_i A}^{A'}) \geq \ell\{\cup(q_i)^m(\Omega) \cap \widehat{P_i A}^{A'}\}$ 、そこで $\ell(\Gamma(\Omega))$
 $\geq \ell[\cup(q_i)^m(\Omega)] \geq \ell((P)^m)$ 故に $|\ell(\Gamma(\Omega)) - \ell[\cup(q_i)^m(\Omega)]| < \varepsilon$ である。
 さて今度は $|\ell(P) - \ell[\cup(P)^m(\Omega)]| < \varepsilon$ と示したいが Γ が $\sum_{x \in P(\Omega)} \cup(x, \Omega)$
 と共通点を持たぬから前と全く同じ論法が成立して云ひ得る。然るに次の関係が
 成立してゐる。即、

$$\ell[\cup(q_i)^m(\Omega)] - \ell[\cup(P_i)^m(\Omega)] = 2\pi n$$

$$\text{そこで } 2\pi n - n\varepsilon < |\ell(P) - \ell(P, \varepsilon)| < 2\pi n + 2\varepsilon$$

さて上の n の定め方では $\varepsilon > 0$ に対して $P_1, P_2, \dots, P_n$ が定り。それに対して
 $\Delta(n) \ni P_i$ ($i=1, 2, \dots, n$) として n を定めた。が此処で $n < \varepsilon$ と假定して差
 支へない。何となれば $n > \varepsilon > \varepsilon'$ ならば $\Delta(n) \subset \Delta(\varepsilon')$ なる故 ε'
 をあらためて n にとるとよい。そのときは

$$(2n-2)\varepsilon < |\ell(P) - \ell(P, \varepsilon)| < (2n+2)\varepsilon$$

$$\text{故に } \lim_{n \rightarrow \infty} \ell(P, \varepsilon) = \ell(P) \quad \text{[証明完了]}$$

定理 3; $E(\Gamma)$ の正則点 (即角点でない点) に於て切線は直線である。

証明 今命題を正しくないとして点 A は正則点でありながら切線はどこでも不連続と仮定すればむしろ示すことを示したい。さて曲線 $E(\Gamma)$ の点 X における切線が実定直線となす角を $\theta(X)$ で表すとすれば $\{X_i\} (i=1, 2, \dots)$ が $\lim_{i \rightarrow \infty} X_i = A$ であるとき $\lim_{i \rightarrow \infty} \theta(X_i) = \theta_0 \neq \theta(A)$ なる $\{X_i\}$ がある筈である。すると $E(\Gamma) \ni X_i \rightarrow Y_i \in \Delta(\Gamma)$ がある。然る前に $\Delta(\Gamma)$ は閉集合なることを示したから $\lim_{k \rightarrow \infty} Y_k = Y$ となれば A と Y は対応する。然して又 $A \rightarrow A' \in \Delta(\Gamma)$ なる A' が存在する。然るも $A \neq Y$ である。何となれば $\lim_{i \rightarrow \infty} \theta(X_i) = \theta_0$ より $\lim_{k \rightarrow \infty} \theta(X_{i_k}) = \theta_0$ である。よつて與へられた $\varepsilon > 0$ に對して N_1 を定めると $m > N_1$ に對して $|\theta_0 - \theta(X_{i_m})| < \varepsilon/n$ が成立する。次に $\lim_{m \rightarrow \infty} X_{i_m} = A$ なる故に $\varepsilon > 0$ に對して N_2 が定まり $m > N_2$ なら $\text{dir}(X_{i_m}, A) < \varepsilon$ そこで $\max(N_1, N_2) = N$ とおくと $m > N$ とすれば $\text{dir}(X_{i_m}, A) < \varepsilon$ かつ $|\theta_0 - \theta(X_{i_m})| < \frac{\varepsilon}{n}$ となる。そこで A より長さ n の細分 AB_0 及び AB_m を $AB_m \parallel X_m Y_m$ $AB_0 \parallel \lim_{m \rightarrow \infty} (X_{i_m} Y_{i_m})$ なるが如くにとる。すると $\text{dir}(AX_m) = \text{dir}(B_m Y_m) < \varepsilon$ そこで $\triangle A' B Y_m$ に於て

$$\begin{aligned} \text{dir}(A' Y_m) &\geq \text{dir}(A' B_0) - \text{dir}(B_0 B_m) - \text{dir}(B_m Y_m) \\ &\geq n \sin(\theta(A) - \theta_0) - 2n(\theta_0 - \theta(X_1)) - \varepsilon \\ &\geq n \sin(\theta(A) - \theta_0) - 3\varepsilon \end{aligned}$$

そこで $m > N$ なる故に $m \rightarrow \infty$ でも成立する。

$\text{dir}(A' Y) \leq n \sin(\theta(A) - \theta_0) - 3\varepsilon$ 但し ε は任意である。そこで $\text{dir}(A' Y) \leq n \sin(\theta(A) - \theta_0) > 0$ 即ち $A' = Y$ である。即ち A は二つの異つた点 $A' Y$ が対応する。即ち A は正則点でない即ち角点である。 (証明完了)

さて此處で $\Gamma(\Gamma) \ni P \rightarrow \Sigma \in \Delta(\Gamma)$ の對應で或る定まつた点群を夫々 O 点としてその点より同一方向に O 点よりの長さによる座標を $\Gamma(\Gamma)$, $\Delta(\Gamma)$ の点に與へうる。一様に前者を Γ で後者を S で表すこととする。そのとき β 點に對する $\Gamma(\Gamma)$ の点の座標 τ は S の座標を考へらるる其を $t(S)$ で表す。

すると次が成立する。

$t(S)$ は S についての有界単調増加函数である。此は $P(q) \rightarrow P_1, P_2 \rightarrow q_1, q_2 \in \Delta(n)$ が夫々對應するとき、 $\overline{P_1 q_1}$ と $\overline{P_2 q_2}$ が交らぬということである。此は当然である。もし交つたとすれば $\text{dis}(P_1 q_1) = \text{dis}(P_2 q_2) = n$ として $\text{dis}(P_1 q_2) \geq n$, $\text{dis}(P_2 q_1) \geq n$ でなければならぬ。然しもし前者が成立するとせば $\Delta P_1 q_1 q_2$ に於いて $\text{dis}(P_1 q_2) \geq \text{dis}(P_1 q_1)$ そこで $\angle P_1 q_1 q_2 \geq \angle P_1 q_1 q_1$ となればならぬ。すると $\angle P_2 q_1 q_2 > \angle P_2 q_2 q_1$ 即ち、 $\text{dis}(q_1 P_2) < \text{dis}(P_2 q_2) = n$ 此は後者にむじゆんする。

及此の際即ち $t(S) \geq 0$ なる有界単調増加函数が与へられたとき上の様な意味で $t(S)$ を持つ様な四線 P が必ず存在することを示したいが算は少し長くなるので此の次にまわしたい。そして次のことを注意したい。

此處で $t(S) = t$ は殆どすべての S につき微分可能である。そして今 P の S 点の X, Y 座標を $x(S), y(S)$ と表し $P(n)$ のそれを $X(t), Y(t)$ で表せば、

$$X(t) = x(S) - n \frac{\frac{dy}{ds}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2}}$$

$$Y(t) = y(S) -$$

よつて此は $\frac{dy}{ds} = [X(t), Y(t), x(S), y(S)]$

$\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{d^2x}{ds^2}$ についても同様。そこで $\frac{dt}{ds}$ が存在する点で $\frac{d^2y}{ds^2}, \frac{d^2x}{ds^2}$ が存在する。然して此が $X, Y(t), P(t), x(S), y(S)$ で表はされる。そこで同一論法を施せば $\frac{dt}{ds}$ が存在する点では $x(S), y(S), X(t), Y(t)$ が何階迄も微係数を持つことが云ひ得る。当然殆どすべての S 点で $P(n)$ は曲率円をもつ。 (つづく)

(1947. 5. 20)