



Title	或ル群ノ測度ニツイテ
Author(s)	遠山, 啓
Citation	全国紙上数学談話会. 1947, 2(6), p. 142-146
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75190
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

55. 或ル群ノ測度ニツイテ

遼 山 啓 (東京工大)

群測度ノ概念ヲ最初ニ導入シタノハ A. Hurwitz (Gött, Nachr, 1897) デアツタ. 彼ハ unitary 群及ビ直交群ノ測度ヲ一般化シタ極座標ヲ用ヒテ explicitニ求メテサル. コレハ unitary 群, unitary symplectic 群及ビ直交群ノ測度ヲ Cayleyノ parameter ヲ用ヒテ表ハサウト思フ. マツル O ラ n^2 個ノ複素数ノ成分ヲ有スル n 次ノ正方行列ノ作ル $2n^2$ 次元ノ Euclid 空間トスル.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

コノ空間ノ線素 ds ハ

$$ds^2 = \sum_i \sum_k |d\alpha_{ik}|^2 = Sp(d\tilde{A} dA)$$

ヲ表ハサレル。但シ Sp ハ跡, $d\tilde{A}$ ハ dA ノ *Hermite* 共軛ヲ表ハス。

ヲ任意ノ *unitary* 行列 U , *Cayley* , *parameter* デ決メヤウニ表サレル。

$$U = (E - iH)^{-1} (E + iH)$$

コノトキ U ノ集合 $\mathcal{U}$ ハ O_n ノ部分集合体ヲ作ル。 U ノ微分ヲ作ルト

$$dU = (E - iH)^{-1} (2i dH) (E - iH)^{-1}$$

一方 dU ヲ左側カラ或ル *unitary* ナ群要素 V デ移動シテ $V dU$ トスル。ソノ所ノ要素ヲ ds' トスルト (但シ $2i$ ヲ省ク)

$$ds'^2 = Sp(d\tilde{U} \tilde{V} V dU) = Sp(d\tilde{U} dU) = ds^2$$

即チ V ハ $\mathcal{U}$ ノ中デーツノ *motion* ヲ引キ起ス。之ハ右側デモ同ジデアル。
 ds^2 ヲ H デ表ハスト

$$\begin{aligned} ds^2 &= Sp((E + iH)^{-1} d\tilde{H} (E + iH)^{-1} (E - iH)^{-1} dH (E - iH)^{-1}) \\ &= Sp((E + H^2)^{-1} d\tilde{H} (E + H^2)^{-1} dH) \end{aligned}$$

コノ ds デ体積ヲ測レバ。之ガ *Haar* 測度トナルコトハ明ナデアル。

コノ形デ $\sqrt{g}$ ヲ計算スルコトハ困難デアルカラ。之ノヤウナ考ヘヲ用ヒル。

マツ *parameter* H ノ空間ヲ $\mathcal{H}$ トシテ $Z = \text{Euclid}$ ノ計量ヲ導入スル。
 $dt^2 = Sp(d\tilde{H} dH)$ 。

$\mathcal{U}$ ノ中デ $U \rightarrow V^{-1} U V$ ナル変換ヲ行ヘバ。之ニ對應シテ

$$H \rightarrow V^{-1} H V$$

ナル変換ガ起ル。之ハ又 $\mathcal{U}$ 及ビ $\mathcal{H}$ ニオケル *motion* デアル。特ニ H ヲ對角線ニ変換スルヲ選ンデ

$$V^{-1} H V = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} = D$$

トスル。コノトキノ計算ハ

$$\begin{aligned} ds'^2 &= Sp(\{(E + D^2)^{-1} dH'\}^2) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m (1 + \lambda_i^2)^{-1} (1 + \lambda_k^2)^{-1} \\ dH_{ik} dH_{ki} &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m (1 + \lambda_i^2)^{-1} (1 + \lambda_k^2)^{-1} |dH_{ik}|^2 \end{aligned}$$

コノ形ハ直交的ナ *parameter* ヲ表ハス。

$$\sqrt{g} = \sqrt{\prod_{i=1}^n (1+\lambda_i^2)^{-2} \prod_{i \neq k} (1+\lambda_i^2)^{-1} (1+\lambda_k^2)^{-1}} = \prod (1+\lambda_i^2)^{-n} = |E+D^2|^{-n}$$

之ハ明カニ $|E+H^2|^{-n}$ ニ等シイ。

故ニ次ノ定理ヲ得ル。

定理 1 n 次ノ unitary 群ヲ Cayley / parameter H デ表,
スト ソノトキノ測度 $d\Omega$ ハ

$$d\Omega = |E+H^2|^{-n} dH$$

デ表ハサレル。但シ dH ハ スベテノ H ノ変数ノ微分ノ積デアル。

次ニ unitary symplectic 群ニ移ラフ。同ジ論法ヲ適用スルヲメニ
対角線型ニ交換スル必要ガアル。ヨツテ次ノ定理ヲ証明スル。

定理 2 unitary symplectic 行列 (以下 US-行列ト名ヅケ
ル) ハ他ノ或ル US-行列ニヨツテ対角線型ニ変スコトガ出来ル。

証明 任意ノ $2n$ 次ノ US-行列ヲ S トスル。又

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix}$$

ナル行列ヲ用ヒルト $S^T Q S = Q$ トナル。 S ノ一ツノ固有値ヲ入トスル。
ノトキノ固有ベクトル X トスルト。

$$SX = X\lambda$$

$$\text{之カラ} \quad S(Q\bar{X}) = (Q\bar{X})\bar{\lambda}$$

ヲ得ルカラ $\bar{\lambda}$ ナル固有値ノ存在ト $Q\bar{X}$ ナル固有ベクトルヲ有スルコトガ分ル。

今 S ガ $2n$ 個ノ異ナツタ固有値ヲ有スル。即チ *entarten* シテモナイト
仮定スル。コノトキスベテノ根ハ單位円上ニ。シカモ實軸ニ對稱ニ並ンデアル。
上半面上ニアル n 個ノ根ヲ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ トフルト $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_n$ ガ他
ノ n 個トナル。コノ λ_i ハ決シテ ± 1 デハアリ得ナイ。 $\lambda_1 = \pm 1$ デアツタラ $\bar{\lambda}_1 = \lambda_1$
デ 固有ベクトルハ X ト $Q\bar{X}$ デアル。コノニツハ明カニ

$$\bar{X} Q \bar{X} = 0$$

トナルカラ *entarten* シテモルコトトナリ。仮定ニ反スル。 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$
ノ固有ベクトルヲ $X_1, X_2, \dots, X_n$ トシテ、ソレヲ横ニ並ベタ $2n$ 行、 n ヨリノ
行列ヲ $\bar{X}$ デ表ハス。

$$X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$$

コノトキ $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_n$ 対スルモノハ Q 共役アル。コノデ
 $\Sigma = (X, -Q\bar{X})$.

ト置ク、 Σ ガ μS -行列デアルコトヲ示サウ。

$$\Sigma^T Q \Sigma = \begin{pmatrix} X^T Q X - X^T X^- \\ \bar{X}^T X & -X^{-T} Q \bar{X} \end{pmatrix}$$

ココデ $X^T Q X = X^T S^T Q S X = \Lambda X^T Q X \Lambda$.

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

コノ各要素ヲ W_{ik} トスレバ上ノ式カラ

$$\lambda_i W_{ik} \lambda_k = W_{ik}$$

従ツテ、 $(1 - \lambda_i \lambda_k) W_{ik} = 0$

ヲ得ル。コノデ λ_i, λ_k ハ既述ノ条件ニヨリ決シテ 1 トハナラヌ。故ニ $W_{ik} = 0$

故ニ結局

$$\Sigma^T Q \Sigma = Q$$

ヲ得ル。即チ Σ ハ μS デアル。コノ Σ デ

$$\Sigma^T S \Sigma = \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \bar{\Lambda} \end{pmatrix}$$

トナルコトハ明ラカデアル。⁽¹⁾ 一方 *Symplectic* ナル条件ハ $H =$ 対スル
linear ナ条件トナリ (*Weyl, Classical groups: 169*)

$$H = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ \overline{H_{12}} & -H_{11}^T \end{pmatrix} \text{ トカケル。}$$

H_{11} ハ *Hermitian* 行列、 H_{12} ハ対称行列デアル。

(2) *cutarten* シテモルトキハ $H =$ 対スル条件ガツクコトカラ H ノ中デ、
nirgendsdicht トナリ。 *cutarten* シナイモノデ近似シテ行ケバ、求ムル
 結局ヲ得ル。 (証明略)

定理 3 $2n$ 次ノ US 群ノ測度 $d\Omega$ ハ

$$d\Omega = |E + H^2|^{-(n+\frac{1}{2})} dh$$

デ與ヘラレル。

直交群ニツイテハ對角線ノ定理ハ成立シナイガ、 2 次ノ E skew-sym 十行
列ニ分解スルカラ H ハ對角線型トナル。從ツテ同ジク次ノ定理ヲ得ル。

定理 4 n 次ノ直交群ノ測度 $d\Omega$ ハ

$$d\Omega = |E + H^2|^{-(\frac{n-1}{2})} dh$$

デ與ヘラレル。

最後ニ注意スベキコトハ各ノ場合ノ老教ハソノ群ノ次元數ヲ行列ノ次數テ割ッ
クモノデアル事デアル。

同ジコトガ *ultra-lorentz* 群ニモ當ヘル筈デアル。

(1947. 5. 24)