OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Schauder-Tychonoff ノ不動点定理ニ就テ
Author(s)	野水, 克己
Citation	全国紙上数学談話会. 1947, 2(6), p. 149-152
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75192
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

57. Schauder-Tychonoff ノ不動点定理ニ就テ

（阪大）　野水克己

Schauder ガ Stud Math 2 (1930) デ linear metric space ニ於ケル不動点定理ヲ與ヘ Tychonoff ハ Math. Ann. 111 (1935) デ必ズシモ metrisable デナイ linear topological space ノ場合ニ ソレガ locally convex デアルトイフ條件ノ下ニ擴張シテ証明シ

テヰル。併シ locally convex トイフ仮定ハ不要デ全ク一般ノ linear topological space ニ於テ定理ガ成立スル。ヨク用ヒラレル定理デアルカソノ後コノコトヲ注意シテアルノヲ見ナイヤウニ思フノデ以下ソレヲ述ベル。

<u>定理</u> linear topological space ノ convex, compact set ノ夫自身ヘノ連続変換ニハ必ズ不動点ガ存在スル。

(証明) metric ノアル場合ノ Schauder ノ証明ハ不完全ナノデソレヲ訂正シ ソレガ一般ノ場合ニモ殆ンドソノマヽ (metric ノ代リニ uniform structure ヲ用ヒテ) 成立ツコトヲ注意スル。

1° metric ノアル場合

linear metric space R ノ metric ρ ハ $\rho(a,b)=\rho(a-x)$ ヲ満足スルトシテヨイ。次ノ Lemma ハ全ク容易ニ証明出来ル。

<u>Lemma</u> 任意ノ整数 n ($\geqq 2$) 及任意ノ $\varepsilon>0$ ニ對シテ次ノヤウナ $\delta=\delta(n,\varepsilon)$ ガ存在スル: $x_1 \quad x_n \in R$ ヲ $\rho(x_i,x_j)<\delta$ ($i,j=1,\cdots,n$) ナルヤウニトレバ $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$, $\lambda_i\geqq 0$ ナル任意ノ $\lambda_1,\cdots\lambda_n$ ニ對シ $x=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i$ ハ $\rho(x,x_k)<\varepsilon$ ($k=1,\cdots,n$) ヲ満足スル。

R ノ convex, compact set ヲ H. 連続変換ヲ f, $f(H)\subset H$ トスル。H ガ compact ナコトカラ 任意ノ $\varepsilon>0$ ニ對シテ H ノ ε-net $\{\xi_1,\cdots,\xi_s\}$ ガ存在スル。$\xi_1,\cdots\cdots,\xi_s$ ヲ張ラレル convex, closed set ヲ H_0 トスルト明ラカニ $H_0\subset H$. H_0 ハ有限次元ノ complex ト考ヘラレルカラソレヲ分割シテ、ソノ各一ツノ simplex ノ頂点ハ互ニ Lemma ノ $\delta(n,\varepsilon)$ (但 $\dim H_0=n-1$ トスル) 以下ノ距離ニアルヤウニスル。コノ分割サレタ complex ヲ H_0 デ表シ H_0' ニ於ケル連続変換 f' ヲ次ノヤウニ定義スル。d ヲ H_0 ノ一ツノ Simplex ノ頂点トスルトキ、$\{\xi_1,\cdots\xi_s\}$ ガ H ノ ε-net ナルコト及ビ $f(H)\subset H$ ナルコトカラ $\rho(f(d),\xi_i)<\varepsilon$ ナル ξ_i ガ存在スル。ソノ ξ_i デ $f'(d)=\xi_i$ トオク。H_0' ノ simplex ノ頂点ニ對シテコノヤウニ定義サレタ f' ヲ H_0' 全体ニ連續ニ拡張スル。例ヘバ simplex $(d_1,\cdots d_n)$ ノ点 $x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i d_i$ ($\alpha_i\geqq 0$, $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$) ニ對シテ $f'(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f'(d_i)$ トスレバヨイ。明ラカニ $f(H_0')\subset H_0'$ (ココ

マデハ Schaader ノ通リデアル). マタ Lemma ニヨリ H_0' ノ各 Simplex 内ノ任意ノ点カラソノ Simplex ノ任意ノ頂点ヘノ距離ハ ε 以下デアルコトニ注意スル.

次ニ topology デヨリ知ラレテヰルヤウニ complex H_0' ヲ更ニ分割ヲ細カクスルコトニヨリ (ソノ際重心分割ヲ用ヒルコトニスル). 分割サレタ complex H_0'' カラ H_0' ヘノ連続変換 f' ヲ H_0'' カラ H_0' ヘノ Simplicial mapping f'' (H_0'' ノ Simplex ガ H_0' ノ Simplex ヘ移ルヤウナ) デ近似スル サウスレバ d ヲ H_0' ノ Simplex ノ頂点トスルトキ f' ノ定義カラ,

(1) $\rho(f(d), f'(d)) < \varepsilon$

マタ d ヲ H_0'' ノ Simplex ノ頂点トスレバ f'' ノ定義カラ

(2) $\rho(f(d), f''(d)) < \varepsilon$

ガ成立ツ.

サテ f'' ハ有限次元ノ convex. compact set H_0'' ノソレ自身ヘノ連続変換デアルカラ不動点 χ_0 ヲモツ.

(3) $f''(\chi_0) = \chi_0$

χ_0 ノ属スル H_0'' ノ Simplex ノ頂点デ同時ニ H_0' ノ Simplex ノ頂点デアルモノヲ d トスル. カカル頂点 d ノ存在ハ H_0' カラ H_0'' ヘノ分割ニ重心分割ヲ用ヒタコトカラ分ル. コノ d ニ対シテ (1), (2) ガ同時ニ成立ツ. マタ f'' ガ Simplicial デアルコトカラ $f''(\chi)$, $f''(d)$ ハ H_0' ノ同ジ Simplex 属

(4) $\rho(f''(\chi_0), f''(d)) < \varepsilon$

マタ明ラカニ

(5) $\rho(\chi_0, d) < \varepsilon$

(1)ー(5)ニヨリ $\rho(d, f(d)) < 4\varepsilon$

即チ以上デ任意ノ $\varepsilon > 0$ ニ対シ $\rho(d, f(d)) < \varepsilon$ ナル点 $d \in H_0$ CH ガ存在スルコトガイヘタ. $\varepsilon_n \to 0$ ヲトリ. ソレニ対応スルモノヲ $d_n \in H$ ($n = 1, 2 \cdots\cdots$) トスレバ H ガ compact ナコトカラ $\{d_n\}$ ノ集積点 $d \in H$ ガ存在シテ明ラカニ $f(d) = d$ 即チ d ハ不動点デアル.

2° 一般ノ場合

Rヲ linear topological space トスル. Oノ近傍系 $\{U_\alpha\}$ ニヨッテRノ uniform structure ガ考ヘラレル.. 定理ノ証明ハ metric ノ代リニコノ uniform structure デ 例ヘバ $\rho(x,y)<\varepsilon$ ノトコロ= $x-y\in U_\alpha$ トイフヤウニヤッテユケバヨイ. H_0ハ有限次元タカラ、ソノ中デハ Euclid 空間トシテ、metric ガ入リ. 任意ノ U_αニ対シテ $\delta>0$ ガ存在シテ $\rho(x.y)<\delta$, $x.y\in H_0$. ナラバ $x-y\in U_\alpha$ トナルコトニ注意スレバ 1° ノ (1), (2), (4), (5) ガ夫々、

(1)′ $f(d)-f'(d)\in U_\alpha$

(2)′ $f'(d)-f''(d)\in U_\alpha$

(4)′ $f''(x_0)-f''(d)\in U_\alpha$.

(5)′ $x_0-d\in U_\alpha$

トンデ成立チ 従ッテ $d-f(d)\in U_\alpha+U_\alpha+U_\alpha+U_\alpha$ トナルコトハ繰返スマデモナイ. topological group ノ性質カラ 任意ノ U_α =. 対シテ $U_\beta+U_\beta+U_\beta+U_\beta\subset U_\alpha$ ナル U_β ガ存在スルカラ 結局上ノコトカラ 任意ノ U_αニ対シテ $d-f(d)\in U_\alpha$ ナル点 $d\in H$ ガ存在スルコトガ分ル.

$x\in H\to x-f(x)$ ナル連続変換デ $\overline{U_\alpha}$ ノ逆像ヲ $H_\alpha=\{x\in H\mid x-f(x)\in\overline{U_\alpha}\}$ トスレバ H_α ハHノ closed set. 任意ノ $U_{\alpha_1},\cdots U_{\alpha_r}$ =対シ $U_\beta\subset U_{\alpha_1}\cap\cdots\cap U_{\alpha_n}$ ナル U_β ガ存在スルコトカラ $\{H_\alpha\}$ ハ finite intersection property ヲモツ. 従ッテHガ compact ナコトカラ $\bigcap H_\alpha$ =含マレル点 d ガ存在スル. 即チ任意ノ U_α =対シテ $d-f(d)\in\overline{U_\alpha}$. シカルニマタ group, regularity カラ任意ノ U_α =対シテ $\overline{U_\beta}\subset U_\alpha$ ナル U_β ガ存在スルコトニ注意スレバ $d-f(d)$ ハスベテノ U_αニ含マレ. 従ッテ $d-f(d)=0$ $\therefore d=f(d)$ 故=dハ不動点デアル. 之デ證明ガ終ル.

(1947. 6. 13)