



|              |                                                                             |
|--------------|-----------------------------------------------------------------------------|
| Title        | K空間について                                                                     |
| Author(s)    | 中村, 正弘                                                                      |
| Citation     | 全国紙上数学談話会. 1947, 2(6), p. 154-159                                           |
| Version Type | VoR                                                                         |
| URL          | <a href="https://doi.org/10.18910/75194">https://doi.org/10.18910/75194</a> |
| rights       |                                                                             |
| Note         |                                                                             |

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1. この K空間 という言葉は小笠原氏 [6] に負うものです。それはウイクトル空間がノルムを持つ Banach 空間であるとき、すなわち B 束で、次の二条件を満たすものです。

条件 F  $x_n \downarrow 0$  ならば  $\|x_n\| \rightarrow 0$

条件 L  $0 \leq x_n \uparrow$  でノルム有界ならば  $\forall n, x_n$  が存在する。

この二条件はまた次の

条件 B ノルム有界な Moore-Smith 集合は上(下)限に強収斂する。とも同等です。小笠原氏は [6] でかくの如き B 束の性質を、前田 - 小笠原両氏の V 束の表現論を駆使されていろいろと探究されておられます。ここではその中の若干の定理を別の方法で証明したいと存じます。

このために G. Birkhoff [1] によつて V 束に拡張された Hahn の分解定理 を使います。

定理 1 完備 B 束上の順連続線型汎函数により B 束は各々の正部分で正、負の値を与える三つのイデアルの和に分解される。

これは [1] 定理 7.25 の証明中で "定理 7.23 (または 7.24) により" を "順連続性により" と置き替へればそのまま成立しますので、紙面の節約上細い所は略させて頂きます。たゞし ここで 順連続 とは順序について Moore-Smith の意味での連続性で、 $x_\alpha \downarrow 0$  のとき  $f(x_\alpha) \rightarrow 0$  となることで、イデアル とは角谷

先生の[5]の意味です。この Hahn 分解を使いますと[6] §4の理論は僅かに短くなっただけでそのまま成立しますので、次の定理2が成立します。

定理 2  $K$ 空間とその共軛空間のイデアルの作る Boolean 束は同型である。

このとき、同型の対応は互に直交するイデアルの補イデアルを対応させればよいことは小笠原氏[6]に示されてある通りであります。このことは $K$ 空間が $L^p$ と非常によく似た構造を持つことを暗示して居ります。以下 §2で述べることは直接関係しませんが、この類似性のある程度まで確かめられる様に見えると思います。例えば角谷先生の[5]と同じ方法で、 $K$ 空間でも Wecken の分解が成立しますから、 $K$ 空間の表現を主イデアルの表現に代置することが出来ます。そこで Freudenthal[4]の主単位元を持つ場合には共軛束にも主単位の元1が存在しますから、 $X$ に対して $1(1 \times 1)$ をもつて新しいノルムを與えれば、 $K$ 空間を連続に $AL$ 空間に写像することが出来ます。このとき $1(X)$ が連続統であることと、[1]定理3.13によりまして、

定理 3  $K$ 空間は $AL$ 空間の正規部分束と連続同型である。

が証明されます。これはまた同時に $L(\Omega)$ 空間が universal  $K$ -space であることを意味している様に見える。このことは以下の証明には無関係であります。

2. 本節ではまづ[6]定理4.4 — すなわち:

定理 4  $K$ 空間はその共軛空間上のすべての順連続線型汎函数と一致する。

を証明したいと存じます。[6] §4で小笠原氏が示して居られます通り、この結果から直ちに $K$ 空間の任意の密閉が弱コンパクトであることが証明され、またその他にもいろいろな結果が獲られます。証明は二三の補題に分れます。

補題 4.1  $K$ 空間 $E$ は第二共軛空間 $E^{**}$ 内で正規部分束である。

證 明:  $0 \leq u \leq X, u \in E^{**}$  とします。一般の $u$ について $u \in E$ を証明すればいいのですが、これは Freudenthal[4]の有名な定理によつて、 $X$ を $E^{**}$ の主単位元と考えたとき、 $u$ は特性元の線型和の順極限として近似される。また条件F乃至Bによつてすべての特性元が $E$ に属することさえ証明されれば、 $u$ が $E$ に属することはいえますから、 $u$ は特性元であると仮定します。 $u$ は $X$ に

よつて限られていますから、 $E^*$ の順連続関数で、従つて定理1の Hahn 分解を  $E^*$ に對して行うことが出来ます。その直和因子を  $N^+$ と  $N^0$ とします。定理2によつて、 $E$ の主イデアルで  $N^+$ に對應するものが存在しますが、それは  $E$ の特性元の作る主イデアルですから、その特性元を  $e$ とします。すると  $u \wedge (1-e) = 0$  ですから、 $u \leq e$  となります。  $u < e$  ならば  $e-u$  は定理1によつて  $0$ でない  $E^*$ のイデアルを興えるはずですがこれは不可能です。

**補題 4.2**  $K$ 空間  $E$  は  $E^{**}$  の中でイデアルである。

**証明：** [1] 第7章末尾の注意によつて、順序界な直和が  $E$  の中で上限を持つことを証明すればよいのですが、これは条件 B より明らかです。

**定理4の証明：**  $E^*$  の順連続関数を  $E_0^{**}$  で示します。  $u \in E_0^{**}$  だと  $u \in E$  となるものがあるとすれば、4.2 によつてすべての  $x \in E$  に對して  $x \wedge u = 0$  が成立するものが存在します。が、これによつて Hahn 分解を行えば、その正イデアルは  $0$  と異なり、 $E$  のすべての元と直交します。これは不可能です。

この定理の逆が成立することは [6] 定理 4.5 に証明されてあります。小笠原氏は表現論を使用され、Vitali-Hahn-Saks の定理を用いられておりますがこの後者の定理はそれに相当するものが  $V$  束には与えられておりませんので、次節ではその証明を行いたいと思います。

3. Vitali-Hahn-Saks の定理を次の形で述べます。

**定理 5** 完備  $B$  束上の順連続型況函数の可附置列が弱収束するならば、その極限もまた順連続である。

以下の証明は本格的には Saks [9] の証明と同じもので、 $V$  束にいいかえただけ過ぎませんが、Saks の証明の格好に入るまでの若干の準備が必要となりますので、ここに記させて置きます。まづ：

**補題 5.1**  $E$  と  $E^*$  が主量位元を有し、 $E^*$  の主量位元が順連続ならば定理5は成立する。

**証明：**  $x_n \downarrow 0$  のとき  $f(x_n) \rightarrow 0$  が成立すればよいのですから  $1 \geq x_n \geq 0$  としても一般性を失いません。但し、ここで  $f_n \rightarrow f$  (弱) は與えられた汎函数とします。そこで  $0 \leq x \leq 1$  なる区間を  $I$  で表すことにします。  $I$  は配分束をなして

完備ですが、仮定によつて  $|f|(x)$  が順連続ですから、 $|f|(x)$  によつて計量を與えれば連続計量束となります。このとき \* 収束は距離収束と一致しますが、 $f$  の連続性は  $I$  を距離空間上の函数と考えたときの通常の連続性と一致します。これから後は Saks の証明と同一です。先づ

補題 5.2  $X, a \in I$  を任意の元とし  $|f|(x) < \lambda \leq 1$  ならば、 $a$  を中心とする半径  $\lambda$  の開球中より  $I$  の元  $y_1, y_2$  をえらび、 $y_2 = y_1$  とすることが出来る。

証明：  $y_1 = a \wedge (1 - x), y_2 = x + y_1$  とおけば成立します。

補題 5.1 の証明：  $\varepsilon > 0$  として、

$$H_n = \{x \mid \varepsilon \geq |f_n(x) - f_m(x)| \quad m \geq n\}$$

とします。  $H_n$  は開集合で  $\bigcup_n H_n = I$  ですから Baire の定理によつてある  $H_{n_0}$  は  $a$  を中心とする開球で半径  $\lambda$  のものを含みます。そこで補題 5.2 により、

$$|f_n(x) - f_m(x)| = |f_n(y_2 - y_1) - f_m(y_2 - y_1)| \leq |f_n(y_1) - f_m(y_1)| + |f_n(y_2) - f_m(y_2)| \leq 2\varepsilon$$

が  $|f|(x) < \lambda$  なる  $x$  と  $m \geq n$  なる  $m$  について成立します。そこで  $|f_n(x)| < \varepsilon$  の成立する  $0$  の近傍の半径を  $\mu$  とし、 $\delta = \mu \wedge \lambda$  とすれば、 $|f|(x) < \delta$  について  $|f_m(x)| < 3\varepsilon$  または  $|f(x)| < 3\varepsilon$  となります。

定理 5 の証明：  $|f| = \sum \frac{1}{2^k} |f_k|$  とすれば  $|f|(x)$  は順連続です。  $|f|(x)$  によつて  $E$  を Hahn 分解すれば、零イデアル上では定理の成立は明らかですから正イデアル上で成立することを示せば足ります。  $x_\alpha \downarrow 0$  の時  $\bigvee_\alpha x_\alpha = 1$  とすれば、補題 5.1 の証明がそのまま成立します。従つて 5.1 の仮定は不要となり定理 5 が証明されます。

本題の Vitali-Hahn-Saks の定理の形を得るためには、補題 5.1 の証明の末尾に出て来た  $\delta$  と  $\varepsilon$  を使えばいいわけですが、この時には 5.1 の仮定は満足されていますから、変更の必要がありません。

4. 定理 5 の形で述べた Vitali-Hahn-Saks の定理を用ひまして、小笠原氏 [6] の若干の定理を証明致します。まづ定理 4 の逆即ち [6] 定理 4.5 を証明します。

定理 6 共軛空間上の順連続線型汎函数全体とよとの B 束が一致すれば  $K$

空間である。

証明： 条件Fは明らかですから条件Lを証明します。  $E^{**}$ 内で  $Q \subseteq X_n$  がノルム有界であれば、  $X_n$  はある  $E^{**}$  の元に移収束しますが それは定理5によつて  $E^*$  の順連続汎函数となり、従つて仮定により  $E$  に属します。

同様なことが次の二つの定理 ([6] 3.1 及び 5.3) によつても成立します。

定理 7 共軛空間が可分ならば  $K$  空間である。

証明： 仮定により  $E^{**}$  は弱可分となり、従つて Helly の定理によつて  $E^{**}$  の元は  $E$  の元の可数数列によつて近似されます。従つて定理5によつて  $E^{**}$  の元は  $E^*$  上で順連続となります。これは [6] §1 補題3に注意してあります通り条件Fは他なりません。条件Lは共軛束によつては常に成立しますから  $E^*$  は  $K$  空間となります。

定理 8  $K$  空間は弱完備である。

証明：  $X_n$  が弱収束すればその極限は一般には  $E^{**}$  の元となりますが、定理5によつてこれは  $E^*$  上の順連続であり、従つて定理4によつて  $E$  に属します。

これらの定理の証明は本質上は小笠原氏 [6] のものと同一です。その差は  $V$  の  $Hahn-Saks$  の定理をいい変えたに過ぎませんが 定理8の証明は具體的な  $E$  の弱完備性の証明としては Banach の本にありますがものよりは短いのではないかと考えます。

7. 最後に蛇足ながら、B 束に於ける一つの病理的現象を指摘を申し上げたいと思います。小笠原氏 [6] に従ひまして条件Eを満足するとき  $K^-$  空間と呼ぶことにします。特に  $K^-$  空間が正の基を持つとき数列  $K^-$  空間と呼ぶことにします。(基が Dunford-Morse の基 [2] となる時  $K$  空間となります) この時任意の  $X$  に対して  $0 \leq y \leq X$  となる  $y$  の元の基表示は一樣に収束しますから、数列  $K^-$  空間の区間は弱コンパクトのみならず、強コンパクトになります。茲に可分 B 束で区間が強コンパクトであれば小笠原氏 [7] の定理によつて数列  $K^-$  空間であることがわかります。ところでこの上で 0 に弱収束する汎函数列  $f_n$  を考えますと  $0 \leq y \leq X$  ぞ  $f_n(y)$  は一樣に収束しますが、 $f_n^+(x) = \sup_{0 \leq y \leq x} f_n(y)$  ですから、従つて  $f_n^+(x) \rightarrow 0$  となります。逆に可分 B 束で共軛束の束

演算が弱連続であれば  $p_n \rightarrow 0$  (弱) のとき  $f_n^* \rightarrow 0$  (弱) となり,  $0 \leq f_0^*(y) \leq p_0(x) \rightarrow 0$  となりますから任意の区間で  $f_n(x)$  は一様に収束します. 従って I. Gelfand [3] の定理によつて  $B$  束の区間はコンパクトになります. つまり,

定理 9 可分  $B$  束では 共既束の束演算が弱連続のときそのときのみ弱列  $K^*$  空間となる.

束演算が一般に弱連続 (元としても汎函数としても) な例は Rademacher の函数列が  $L, L^p, M$  等で正部分が  $\frac{1}{2}$  に収束することからわかります. このことは  $B$  束の弱位相の研究が制限を受けることを意味するのではないかと思います

#### 参 照 文 献

- [1] G. Birkhoff, "Lattice Theory", N.Y., 1940
- [2] N. Dunford & Morse, Trans. AMS, 40 (1936), 415-420
- [3] I. Gelfand, Mat. Sbornik, 4 (1938), 235-284.
- [4] H. Freudenthal, Proc. Acad. Amster, 39 (1936), 641-651.
- [5] S. Kakutani, Ann. Math., 42 (1941), 523-537.
- [6] T. Ogasawara, 本誌 240 (1942), 1192-1231.
- [7] T. Ogasawara, Hiroshima Journ., 11 (1942) 125-128.
- [8] S. Saks, Trans. AMS, 35 (1933), 965-970  
(1947. 7. 8)