OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	K空間について
Author(s)	中村, 正弘
Citation	全国紙上数学談話会. 1947, 2(6), p. 154-159
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75194
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

59　K空間について

（阪大）　中村正弘

1. このK空間とゆう言葉は小笠原氏〔6〕に習うものです．それはヴエクトル束がノルムを持つBanach空間であるとき．すなはちB束で，次の二條件を満すものです．

條件F　$x_n \downarrow 0$ ならば $\|x_n\| \to 0$

條件L　$0 \leqq x_n \uparrow$ でノルム有界ならば $\bigvee_n x_n$ が存在する．

この二條件はまた次の

條件B　ノルム有界なMoore-Smith 集合は上(下)限に強収斂する．

とも同等です．小笠原氏は〔6〕でかくの如きB束の性質を，前田－小笠原両氏のV束の表現論を駆使されていろいろと深究されておられます．ここではその中の若干の定理を別の方法で証明したいと存じます．

このためにG. Birkhoff〔1〕によつてV束に拡張されたHahnの分解定理を使います．

定理1　完備B束上の順連続線型汎函数により　B束は各々の正部分で正，負零の値をとえる三つのイデアルの直和に分解される．

これは〔1〕定理7.25の証明中で"定理7.23（または7.24）により"を"順連続性により"と置き替えればそのまゝ成立しますので，紙面の節約上細い所は略させて頂きます．たゞし　ここで順連続とは束演算についてMoore-Smithの意味での連続性で，$x_\alpha \downarrow 0$ のとき $f(x_\alpha) \to 0$ となることで，イデアルとは角谷

先生の[5]の基本です。このHahn分解を使いますと[6] §4の理論は僅かに短かくなつただけでそのまま成立しますので，次の定理2が成立します。

定理2　K空間とその共軛空間のイデアルの作るBoole束は同型である。

このとき同型の対応は互に直交するイデアールの補イデアールを対応させればよいことは小笠原氏[6]に示されてある通りであります。このことはK空間がL^pと非常によく似た構造を持つことを暗示して居ります。以下§2で述べることには直接関係しませんが　この類似性をある程度まで確められる様に思われます。例えば角谷先生の[5]と同じ方法で，K空間でもWeckenの分解が成立しますから　K空間の表現を主イデアルの表現に代置することが出来ます。そこでFreudenthal[4]の主単位元を持つ場合には共軛束にも主単の元1が存在しますから，xに對して$1(|x|\wedge 1)$をもつて新しいノルムを與えれば，K空間を連続にAL空間に準像することが出来ます。このとき$1(x)$が順連続であることと，[1]定理3.13によりまして，

定理3　K空間はAL空間の正規部分束と連続同型である。

が証明されます。これはまた同時に　$L(\Omega)$空間がuniversal K-spaceであることを意味している様に思われます。このことは以下の証明には無関係であります。

2．本節ではまず[6]定理4.4 ―すなはち：

定理4　K空間はその共軛空間上のすべての順連続線型汎函数と一致する。

を証明したいと存じます。[6] §4で小笠原氏が示して居られます通り　この点まから直ちにK空間の任意の空間が弱コンパクトであることが証明され，またその他にもいろいろな結果が得られます。証明は二三の補題に分れます。

補題4.1　K空間Eは第二共軛空間E^{**}内で正規部分束である。

證明：　$0\leqq u\leqq x$, $u\in E^{**}$とします。一般のuについて$u\in E$を証明すればいいのですが，これはFreudenthal[4]の有名な定理によつて，xをE^{**}の主單位元と考えたとき，uは特性元の線型和の順極限として近似されまた條件下乃至Bによつてすべての特性元がEに屬することさえ証明されればuがEに屬することもいえますから，uは特性元であると仮定します。uはxに

よつて限られていますから，E^*の順連続汎函数で．従つて定理1の Hahn 分解をE^*に対して行うことが出来ます．その直和因子をN^+とN^0とします．定理2によつて，Eの主イデアルでN^+に稠密するものが存在しますが．それはEの特性元の作る主イデアルですから，その特性元をeとします．すると$u \wedge (1-e) = 0$ですから，$u \leqq e$となります．$u < e$ならば$e-u$は定理1によつて0でないE^*のイデアルを与えるはずですがこれは不可能です．

補題 4.2　K空間EはE^{**}の中でイデアルである．

証明：[1] 第7章末尾の注意によつて，順有界な集合がEの中で上限を持つことを証明すればよいのですが，これは条件Bより明らかです．

定理4の証明：E^*の順連続汎函数をE_0^{**}で示します．$u \in E_0^{**}$で$u \notin E$となるものがあるとすれば，4.2 によつてすべての$x \in E$に対して$X \wedge u = 0$が成立するものが存在します．が，これによつて Hahn 分解を行えれば，その正イデアールは0と異り，Eのすべての元と直交します．これは不可能です．

この定理の逆が成立することは[6]定理4.5に証明されてあります．小笠原氏は表現論を使用され，Vitali-Hahn-Saks の定理を用いられておりますがこの後者の定理はそれに相当するものがV束には与えられておりませんので，次節ではその証明を行いたいと思います．

3. Vitali-Hahn-Saks の定理を次の形で述べます．

定理 5　完備B束上の順連続線型汎函数の可附番列が弱収斂するならばその極限もまた順連続である．

以下の証明は本質的には Saks[8] の証明と同じもので，V束にいいかえたに過ぎませんが，Saks の証明の階梯に入るまでの若干の準備が必要となりますので，ここに記させて頂きます．まづ：

補題 5.1　EとE* が主単位元を有し，E^*の主単位元が順連続ならば定理5は成立する．

證明：$x_\alpha \downarrow 0$のとき$f(x_\alpha) \to 0$が成立すればよいのですから$1 \geqq x_\alpha \geqq 0$としても一般性を失いません．但し，ここで$f_n \to f$(弱)は与えられた汎函数とします．そこで$0 \leqq x \leqq 1$なる区間を1で表すことにします．Iは区分集合として

完備ですが，仮定によつて $|(x)$ が順連続ですから，$|(x)$ によつて計量を与えれば連続計量束となります．このとき *収斂は距離収斂と一致しますが，f の連続性は I を距離空間上の点列と考えたときの通常の連続性と一致します．これから後は Saks の証明と同一です．先ず

補題 5.2　$x, a \in I$ を任意の元とし $|(x) < \lambda \leqq |$ ならば，a を中心とする半径 λ の開球中より I の元 y_1, y_2 をえらび，$y_2 = y_1$ とすることが出来る．

証明：　$y_1 = a \wedge (1-x)$，$y_2 = x + y_1$ とおけば成立します．

補題 5.1 の証明：　$\varepsilon > 0$ として，

$$H_n = \left\{ x \mid \varepsilon \geqq |f_n(x) - f_m(x)| \quad m \geqq n \right\}$$

とします．H_n は閉集合で $\bigvee_n H_n = I$ ですから Baire の定理によつてある H_i は a を中心とする開球で半径 λ のものを含みます．そこで補題 5.2 により

$$|f_n(x) - f_m(x)| = |f_n(y_2 - y_1) - f_m(y_2 - y_1)| \leqq |f_n(y_1) - f_m(y_1)| + |f_n(y_1) - f_m(y_2)| \leqq 2\varepsilon$$

が $|(x) < \lambda$ なる x と $m \geqq n$ なる m について成立します．そこで $|f_n(x)| < \varepsilon$ の成立する 0 の逆像の半径を μ とし，$\delta = \mu \wedge \lambda$ とすれば，$|(x) < \delta$ について $|f_m(x)| < 3\varepsilon$ または $|f(x)| < 3\varepsilon$ となります．

定理 5 の証明：　$| = \sum \frac{1}{2^i} |f_i|$ とすれば $|(x)$ は順連続です．$|(x)$ によつて E を Hahn 分解すれば，零イデアル上では定理の成立は明らかですから正イデアル上で成立することを示せば足ります．$\chi_\alpha \downarrow 0$ の時 $\bigvee_\alpha \chi_\alpha = 1$ とすれば，補題 5.1 の証明がそのまゝ成立します．従つて 5.1 の仮定は不要となり定理 5 が証明されます．

本来の Vitali-Hahn-Saks の定理の形を得るためには，補題 5.1 の証明の末尾に出て来た δ と ε を使えばいいわけです．この時には 5.1 の仮定は満足されていますから，変更の必要がありません．

4．定理 5 の形で述べた Vitali-Hahn-Saks の定理を用いまして，小笠原氏 [6] の若干の定理を証明致します．まず定理 4 の逆即ち [6] 定理 4.5 を証明します．

定理 6．　共役空間上の順連続線型汎函数全体ともとの B 束が一致すれば K

空間である.

証明: 条件Fは明らかですから条件Lを証明します. E^{**}内で$0 \leqq x_n \uparrow$でノルム有界であれば, x_nはあるE^{**}の元に弱収斂しますが それは定理5によってE^*の順連続汎函数となり, 従って仮定によりEに属します.

同様なことが次の二つの定理([6] 3.1及び5.3)についても成立します.

定理 7 共軛空間が可分ならばK空間である.

証明: 仮定によりE^{***}は弱可分となり, 従ってHellyの定理によってE^{**}の元はEの元の可算番列によって近似されます. 従って定理5によってE^{***}の元はE^*上で順連続となります. これは[6] §1 補題3で注意してあります通り条件Fに他なりません. 条件Lは共軛束については常に成立しますからE^*はK空間となります.

定理 8 K空間は弱完備である.

証明: x_nが弱収斂すればその極限は一般にはE^{**}の元となりますが, 定理5によってこれはE^{**}上の順連続であり, 従って定理4によってEに属します.

これらの定理の証明は本質上は小笠原氏[6]のものと同一です. その差はV.G.-Hahn-Saksの定理をいい換えたに過ぎませんが 定理8の証明は具体的なしの弱完備性の証明としてはBanachの本にありますものよりは短いのではないかと考えます.

7. 最後に蛇足ながら, B束における一つの病理的現象を御眼に曝し上げたいと思います. 小笠原氏[6]に従いまして条件Eを満足するとき K^-空間と呼ぶことにします. 特にK^-空間が正の基を持つとき数列K^-空間と呼ぶことにします. (基がDunford-Morseの基[2]となる時K空間となります)この時任意のxに対して$0 \leqq y \leqq x$となるyの元の基表示は一様に収斂しますから, 数列K^-空間の区間は弱コンパクトのみならず, 強コンパクトになります. 逆に可分B束で区間が強コンパクトであれば小笠原氏[7]の定理によって数列K^-空間であることがわかります. ところでこの上で0に弱収斂する汎函数列f_nを考えますと$0 \leqq y \leqq x$で$f_n(y)$は一様に収斂しますが, $f_n^+(x) = \sup_{0 \leqq y \leqq x} f_n(y)$ですから, 従って$f_n^+(x) \to 0$となります. 逆に可分B束で共軛束の凍

束論が弱連続であれば $f_n \to 0$ (弱) のとき $f_n^+ \to 0$ (弱) となり. $0 \leqq f_0^T(y) \leqq f_n(x) \to 0$ となりますから任意の区間で $f_n(x)$ は一様に収斂します. 従って I. Gelfond [3] の定理によつて B 束の区間はコンパクトになります. つまり.

定理 9　可分 B 束では 共役束の束演算が弱連続のときそのときのみ列 K$^-$ 空間となる.

束演算が一般に弱連続(元としても汎函数としても)なら ぬ例は Rademacher の函数列が L, L^p, M 等で正部分が $\frac{1}{2}$ に收斂することからわかります. このことは B 束の弱位相の探究が制限を受けることを意味するのではないかと思われます.

参照文献

[1] G. Birkhoff, "Lattice Theory", N.Y., 1940

[2] N. Dunford & Morse, Trans. AMS., 40 (1936), 415-420

[3] I. Gelfand, Mat. Sbornik, 4 (1938), 235-284.

[4] H. Freudenthal, Proc. Acad. Amster, 39 (1936), 641-651.

[5] S. Kakutani, Ann. Math., 42 (1941), 523-537.

[6] T. Ogasawara., 本誌 240 (1942), 1192-1231.

[7] T. Ogasawara, Hirosima Joum., 11 (1942) 125-128.

[8] S. Saks, Trous. AMS., 35 (1933), 965-970

(1947. 7. 8)