



Title	規数線形束の諸性質 I
Author(s)	中野, 秀五郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1947, 2(6), p. 168-175
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75197
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

62. 規数線形束の諸性質 Ⅰ

中野秀五郎

規数線形束 即ち Birkhoff の *Lattice Theory* における Banach lattice は Kantorovitch: *Lineare halbgeordnete Räume*, *Rec. Math. Moscow* 2 (1937) 121-165 にて初めて考へられ, 正則^{*}なる性質を中心として色々の空間が考へられた。著者はかねて規数線形束の分類を志し, 其性質の分析を考へた。今後の研究の便宜上 今迄に得た断片的に発表し, 或は数年来東大セミナーに於ける講義にて得た結果の一部を次にまとめて記することとする。簡便の爲文献は, (B) としては以上の Birkhoff の本又 (K) としては, 以上の Kantorovitch の論文 尚又参考の論文には次の記号を使用する。

- (1) *Teilweise geordnete Algebra* 数学雑誌 17. (1941) 425-511
- (2) *Stetige lineare Funktionale auf dem teilweise geordneten Modul.* 東大紀要 4. (1942) 201-382.
- (3) *Riesz Fischerer Satz im normierten teilweise geordneten Modul.* 学士院 18. (1942) 350-353.
- (4) *Über die Stetigkeit des normierten teilweise*
学士院 19. (1943) 10-11.
- (5) *Über ein lineares Funktional auf dem teilweise geordneten Modul* 学士院 18. (1942) 548-552

(6) Über Erweiterungen von allgemeinen teilweise-geordneten Moduln. I 学士院 18(1941) 626-630

(7) 同 II. 学士院 19(1943) 138-143.

§1. 連続線形束空間の性質

此處では $\mathcal{M}$ は連続なる線形束 即ち 任意の可附番個の正要素列 a_ν に對し $\bigcap a_\nu$ が存在するものとする. 又收斂は皆 *order* 收斂の意味とする.

1) 連続: 正要素系 $a_\lambda \geq 0$ ($\lambda \in \Lambda$) に對し $\bigcap a_\lambda$ が存在する.

2) 逐次連続: 正要素系 a_λ に對し $\bigcap_{\lambda} a_{\lambda_\nu} = \bigcap_{\lambda} a_\lambda$ が列 $a_{\lambda_1}, a_{\lambda_2}, \dots$ が含まれる.

3) 完全: $a_\nu \wedge a_\mu = 0$ ($\nu \neq \mu$) なる $a_1, a_2, \dots$ に對し $\bigvee a_\nu$ が存在する.

4) 汎完全: $a_\lambda \sim a_\mu = 0$ ($\lambda \neq \mu$) なる a_λ に對し $\bigvee a_\lambda$ が存在する.

(以上(i)参照)

5) 係数完備: $a_\nu \geq 0$ ($\nu = 1, 2, \dots$) に對し $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu a_\nu$ が收斂なる正数列 α_ν が存在する.

6) 直交係数完備: $a_\nu \wedge a_\mu = 0$ ($\nu \neq \mu$) に對し $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu a_\nu$ が收斂なる正数列 α_ν が存在する.

7) 非有界: $a_\nu \geq 0$ に對し $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ が收斂ならば, $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu a_\nu$ が收斂に對し $\lim_{L \rightarrow \infty} \alpha_L = +\infty$ なる正数列 α_L が存在する.

8) 直交非有界: $a_\nu \wedge a_\mu = 0$ ($\nu \neq \mu$), $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ が收斂ならば $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu a_\nu$ が收斂に對し $\lim_{L \rightarrow \infty} \alpha_L = +\infty$ なる正数列 α_L が存在する. ((7)参照).

9) 一致連続: $a_\nu \downarrow 0$ ならば, $a_\nu \leq \varepsilon_\nu \ell$, $\varepsilon_\nu \downarrow 0$, $\ell \geq 0$ なる ε_ν, ℓ が存在する. (K)

10) 直交一致連続: $a_\nu \wedge a_\mu = 0$, $\lim_{\nu \rightarrow \infty} a_\nu = 0$ ならば $a_\nu \leq \varepsilon_\nu \ell$, $\varepsilon_\nu \downarrow 0$, $\ell \geq 0$.

11) 正則完備: 二重列 $a_\nu, 3a_{\nu, \mu} \geq \dots \rightarrow 0$ ($\nu = 1, 2, \dots$) に對し $\ell \geq a_\nu$, μ_ν ($\nu = 1, 2, \dots$) なる μ_ν 及び ℓ が存在する. ((5)参照.)

(K)に於ける「正則」とは、正則完備上級連続となることである。

以上の性質の順の関係として、明かなことは、2)→1), 4)→3), 3)→6), 3)→8), 5)→6), 7)→8), 9)→10)が成立する。

定理 非有界と一般連続とは同等である。

証明. $\mathcal{M}$ が非有界とすれば、 $a_n \downarrow 0$ に対し $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$ は収斂なるを以て $\ell = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (a_n - a_{n+1})$, $\alpha_n \uparrow +\infty$ なる正数列 α_n が存在し、此 ℓ に対し、 $a_n \leq \frac{1}{\alpha_n} \ell$ が成立する。逆に $\mathcal{M}$ が一般連続なるときは $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収斂にして $a_n \geq 0$ なるときは $b_n = a_n + a_{n+1} + \dots$ に対し $b_n \downarrow 0$ なるべきを以て、 $b_n \leq \varepsilon_n \ell$, $\varepsilon_n \downarrow 0$ が成立し、 $\varepsilon_{v_\mu} \leq \frac{1}{\mu}$ なる v_μ に対し $\sum_{\mu} b_{v_\mu}$ が収斂なるを以て、 $\mathcal{M}$ が非有界なることが知られる。同様にして次の定理が証明される。

定理 直交非有界と直交一般連続とは同等である。

定理 正則完備は一般連続且係数完備と同等である。

証明. $\mathcal{M}$ が正則完備なるときは、 $a_n \geq 0$ に対し $\frac{1}{\alpha_n} a_n \downarrow 0$ なるを以て、 $\ell \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} a_n$ なる μ_n が存在し、従つて $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} a_n$ は収斂である。又 $a_n \downarrow 0$ に対し、 $\mu a_n \downarrow 0$ ($\mu = 1, 2, \dots$) なるを以て $\ell \geq \mu a_{v_\mu}$ ($\mu = 1, 2, \dots$) なる v_μ が存在し、従つて $\mathcal{M}$ が一般連続となる。逆に $\mathcal{M}$ が係数完備且一般連続とすれば、 $a_{n,\mu} \downarrow 0$ ($\mu = 1, 2, \dots$) に対し、 $\varepsilon_n \ell_{\mu} \geq a_{n,\mu}$, $\varepsilon_n \downarrow 0$ にして、且 $\sum \alpha_{\mu} \ell_{\mu}$ 収斂なるを以て、 $\alpha_{\mu} > \varepsilon_{v_\mu}$ に対し $\sum \alpha_{\mu} \ell_{\mu} \geq a_{v_\mu, \mu}$ が成立する。

§2 規範線形空間の性質

線形空間 $\mathcal{M}$ に規範 $\|a\|$ が定義せられ、

- 1) $\|a\| \geq 0$, $\|a\|$ が定義せられ、
- 2) $\|\alpha a\| = |\alpha| \|a\|$,
- 3) $\|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|$
- 4) $|a| \leq |b|$ ならば $\|a\| \leq \|b\|$

が満足されてゐるとする。特に、

5°) $|a| \leq |b|, \|a\| = \|b\|$ ならば $|a| = |b|$

が満足されるときは、此規数は増加規数であると云ふこととする。次に $\mathcal{M}$ は連続線形空間として次の定義を設ける。

- 1) 半連続規数: $0 \leq a_v \uparrow a$ ならば $\|a_v\| \uparrow \|a\|$,
- 2) 汎半連続規数: $a_\lambda \geq 0, a = \bigvee_\lambda a_\lambda$ ならば $\sup \|a_\lambda\| = \|a\|$
- 3) 連続規数: $a_v \downarrow 0$ ならば $\|a_v\| \downarrow 0$.
- 4) 完備規数: a_v が Cauchy sequence ならば $\lim_{v \rightarrow \infty} \|a_v - a\| = 0$ なる a が存在する。
- 5) 單調完備規数: $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots$ として $\sup \|a_v\| < +\infty$ ならば、 $a_v \leq a$ なる a が存在する。
- 6) 汎單調完備規数: $a_\lambda \geq 0$ として、 $\sup \|a_\lambda\| < +\infty$ ならば、 $a_\lambda \leq a$ なる a が存在する。

先づ明かに 2) $\rightarrow$ 1) 6) $\rightarrow$ 5) が成立する。

定理 規数が半連続上單調完備なるときは此規数は完備である。此定理は既に前線結 (Reflexive vector lattice の norm として) にて書いた。

定理 規数が連続ならば、 $\mathcal{M}$ は超汎連続にして且つ汎半連続な数である。連続規数から $\mathcal{M}$ の超汎連続の出ることは (4) にて証明されてゐる。又汎半連続規数となることは、同様にして証明されることが (7) に注意されてゐる。即ち $a = \bigvee_\lambda a_\lambda$ として任意の a_λ, a_{λ_2} に対して $a_\lambda, a_{\lambda_2} \leq a_{\lambda_3}$ なる a_{λ_3} が存在すると仮定する。

$$\|a_v - a_{v-1}\| \geq \sup_{a_\lambda \geq a_{v-1}} \|a_\lambda - a_{v-1}\| - \frac{1}{2^v} \quad a_v \geq a_{v-1}$$

なるが $0 < a_\lambda$ に属する a_v を定めるときは、 $\bigvee a_v = a_0$ に対して任意の a_λ 及び $a_\lambda \vee a_\mu \leq a_\alpha, \mu \geq v$ に対して

$$\|(a_\lambda \vee a_\mu) - a_0\| \leq \|(a_\lambda \vee a_\mu) - a_v\| \leq \|a_\mu - a_v\| \leq \|a_0 - a_v\| + \frac{1}{2^{v+1}}$$

より $\|(a_\lambda \vee a_0) - a_0\| = 0$ が得られる。従つて $a_\lambda \vee a_0 = a_0$ 即ち $a_\lambda \leq a_0$ より $a = a_0$ が得られる。同様にして次の定理が證明される。

定理 連続規数且單調完備規数ならば、汎單調完備規数である。

定理 半連続規数且増加規数ならば、 $\mathcal{M}$ は超汎連続である。

証明: $a_n \geq 0, \forall a_n = a$ なるときは $a_n = a_{\lambda_1} \vee \dots \vee a_{\lambda_n}$
 $a_n \uparrow a_0, \|a_n\| \uparrow \|a\|$ なるが如く a_n が選べる。然るときは $0 \leq a_0 \leq a,$
 $\|a_0\| = \|a\|$ より $a_0 = a$ が証明される。

同様にして次の定理が証明される。

定理 規数が半連続、増加且連続完備ならば、汎数完備である。

定理 無限次元を完全なる $\mathcal{M}$ は規数を有さない。

証明: $a_n \wedge a_m = 0 (n \neq m)$ に對し、 $e = \sum \frac{2}{\|a_n\|} a_n$ と置くときは $\|e\| \geq 2^n$ となつて矛盾する。

$\mathcal{M}$ に於ける任意の要素 p への射影子を $[p]$ にて表はすこととする。

(11) 参照) 然るときは、半連続、及び連続規数に關し次の定理が成立する。

定理 $a \geq 0, [p_n] \uparrow [p]$ に對し $\|[p_n]a\| \uparrow \|[p]a\|$ ならば連続規数である。

定理 $a \geq 0, [p_n] \downarrow [0]$ に對し $\|[p_n]a\| \downarrow 0$ ならば連続規数である。

証明 2 参照。

定理 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n - a\| = 0, a_n \geq 0$ に對し、 $a_1 \leq a_2 \leq \dots$ 或は $a_1 \geq a_2 \geq \dots$ ならば $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ である。
より次の定理が得られる。

定理 完備規数ならば $\mathcal{M}$ は係数完備である。如何となれば、 $a_n \geq 0$ に對し $\sum \frac{1}{2^n \|a_n\|} a_n$ は收斂する。

定理 直交一様連続ならば、連続規数である。如何となれば、 $a \geq 0, [p_n] \downarrow [0]$ に對し $\varepsilon_n e \geq [p_n]a, \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ なるべきを以て $\|[p_n]a\| \leq \varepsilon_n \|e\|$ が成立する。

定理 規数が連続且完備なるときは $\mathcal{M}$ は正則完備である。

証明: $a_{n,1} \geq a_{n,2} \geq \dots \geq 0$ なるときは $\sum \|a_{n,\mu_n}\|$ が收斂する μ_n が得られ、從つて $\sum a_{n,\mu_n} \geq a_{n,\mu_n}$ である。

定義 任意の正数 γ, ε に對し 正数 δ を適當に定めるとき、 $\|a\| \leq \gamma, \|b\| \leq \gamma$ ならば、 $\|a+b\| \geq \|a\| + \delta$ なるとき 此規数は一様増加と云ふ。

定理 規数が一様増加且半連続ならば 此規数は連続である。

証明: $a \geq 0$, $[p_n] \uparrow 0$ に対し $\|[p_n]a\| \geq \varepsilon$ であるとすれば 適当な正数 δ に対し $\|a\| \geq \|([a] - [p_n])a\| + \delta$. 故に $n \rightarrow \infty$ に対し $\|a\| \geq \|a\| + \delta$ となつて矛盾する.

定理 規数が一様増加上完備なときは 此規数は連続且汎星調完備である.

証明は(2)を参照されたい.

注意: 完備でない規数を考えることは必要である. 例へば, Banach の (M) 空間は (L) 空間の部分空間と考へることにより (M) 空間が超汎連続なることが知られる.

§3 収 斂

連続線形束 $\mathcal{L}$ に於ける微数は所謂 *ordre convergence* である. 即ち $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ とは, $|a_n - a| \leq e_n$, $e_1 \geq e_2 \geq \dots$, $\bigwedge e_n = 0$ なる e_n の存在することである. 次に他の収斂を定義する.

1) 個別収斂: 任意の $C_1 \leq C_2$ に対し $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \wedge C_2) \vee C_1 = (a \wedge C_2) \vee C_1$ なるとき, a_n は a に個別収斂すると言ひ, $\text{ind-}\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ と表はす.

これは *D-convergence* と一致する. 即ち $\mathcal{L}$ を含む完全線形束の中にて *ordre convergence* と一致する. ((1) 参照)

定理. $\text{ind-}\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ なる際の必要且充分なる条件は, 任意の射影 $[p]$ に対し $[p_n] \uparrow [p]$, $\lim_{n \rightarrow \infty} [p_n]a_n = [p]a$ なる $[p_n]$ の存在することである.

証明は *Semi-ordered linear space* に於ける個別 *ergodic* 定理として “数学” に発表することとなつてゐる. 又此定理より $\text{ind-}\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\text{ind-}\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ より $\text{ind-}\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$, $\text{ind-}\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \wedge b_n) = a \wedge b$ 等一般に *order convergence* に關して成立する性質が得られる.

2) 星収斂: a_n の任意の部分列は $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{p_n} = a$ なる部分列 a_{p_n} を含むとき, a_n は a に星収斂すると言ひ, $\text{st-}\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ と記す. ((K) 参照)

3) 星個別収斂: a_n の任意の部分列が $\text{ind-}\lim_{n \rightarrow \infty} a_{p_n} = a$ なる部分なり

$a_{\mu\nu}$ を含むことで $\delta\text{-ind-}\lim_{\nu \rightarrow \infty} a_\nu = a$ と表はすこととする。

定理 規数が半連続にして、 $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \|a_\nu - a\| = 0$ ならば、 $\delta\text{-ind-}\lim_{\nu \rightarrow \infty} a_\nu = a$ である。

証明: a_ν の任意の部分列より $\|a_{\mu\nu} - a\| \leq \frac{1}{2^\nu}$ なる $a_{\mu\nu}$ を並び、任意の $C \geq 0$ に対し $\phi_\nu = \lim_{\mu \rightarrow \infty} (|a_{\mu\nu} - a| + \dots + |a_{\mu\nu} - a|) \wedge C$ と置くときは、 $\|\phi_\nu\| \leq \frac{1}{2^{\nu-1}}$, $\phi_1 \geq \phi_2 \geq \dots$ より $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \phi_\nu = 0$ が得られる。従つて $\lim_{\nu \rightarrow \infty} a_{\mu\nu} = a$ である。

同様にして 次の定理が証明される。

定理 規数が完備にして、 $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \|a_\nu - a\| = 0$ ならば $\delta\text{-}\lim_{\nu \rightarrow \infty} a_\nu = a$ である。

定理 規数が半連続にして、 $\delta\text{-ind-}\lim_{\nu \rightarrow \infty} a_\nu = a$ ならば $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \|a_\nu\| \geq \|a\|$ 。

証明: $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \|a_\nu\| < \|a\|$ ind- $\lim_{\nu \rightarrow \infty} |a_\nu| = |a|$ とすれば、 $\phi_\nu = |a_\nu| \wedge |a_{\nu+1}| \wedge \dots$ に対して $\phi_\nu \uparrow |a|$ なるべきを以て $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \|\phi_\nu\| = \|a\|$ として、然かも $\|a_\nu\| \geq \|\phi_\nu\|$ となり矛盾する。

又次の二定理は殆んど明らかである。

定理 規数が連続にして、 $\delta\text{-}\lim_{\nu \rightarrow \infty} a_\nu = a$ ならば $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \|a_\nu - a\| = 0$ 。

定理 規数が連続にして $\delta\text{-ind-}\lim_{\nu \rightarrow \infty} a_\nu = a$ として、然かも $[p_\mu] \downarrow [0]$ に対して $\|[p_\mu] a_\nu\|$ が $\mu \rightarrow \infty$ に対して一様に 0 に収斂すれば $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \|a_\nu - a\| = 0$ 。

定理 規数が完備目一様連続になるとき $\delta\text{-ind-}\lim_{\nu \rightarrow \infty} a_\nu = a$, $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \|a_\nu\| = \|a\|$ ならば $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \|a_\nu - a\| = 0$ である。

証明: 完備より $[a_\nu] \leq [a_0]$ なる a_0 が存在する。適当な $[p_\mu] \downarrow 0$ 及び部分列 $a_{\mu\nu}$ に対し $\lim_{\nu \rightarrow \infty} ([a_\mu] - [p_\mu]) a_{\mu\nu} = ([a_0] - [p_\mu]) a$ が成立する。故に $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \|[a_0] - [p_\mu]\| \|a_\nu - a\| = 0$ 若しも $\varepsilon > 0$ に対して如何なる μ に対しても $\|[p_\mu] a_\mu\| \geq \varepsilon$ なる μ_ν が存在するときは、適当な $\delta > 0$ に対し $\|a_{\mu\nu}\| \geq \delta + \|[a_0] - [p_\mu]\| \|a_\nu - a\|$ なるべきを以て、 $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \|a_{\mu\nu}\| \geq \|[a_0] - [p_\mu]\| \|a\| + \delta$ が得られ、従つて $\mu \rightarrow \infty$ に対して $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \|a_{\mu\nu}\| \geq \|a\| + \delta$ となつて矛盾する。故に $\|[p_\mu] a_\mu\|$ は $\mu \rightarrow \infty$ に対して、一様に 0 に収斂する。又

$$\| (a_{\mu\nu} - a) \| \leq \| ([a_0] - [p_\mu]) (a_{\mu\nu} - a) \| \| [p_\mu] a_{\mu\nu} \| + \| [p_\mu] a \|$$

より、従つて $\lim_{\mu \rightarrow \infty} \| (a_{\mu\nu} - a) \| = 0$ が得られる。即ち任意の部分列より

$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \| a_{\mu\nu} - a \| = 0$ なる部分列 $a_{\mu\nu}$ が選べるを以て、結局 $\| a_{\mu\nu} - a \| = 0$ である。

現数が完備でないときは Cantor 型まで完備化が可能である。重調完備化に就いては次の定理が成立する。

定理 現数が半連続にして、 $\mathcal{M}$ の適宜な要素列 a_ν に対し $a_\nu \wedge a_\mu = 0$ ($\nu \neq \mu$) にして a_ν の何れとも直交する要素が 0 なるときは $\mathcal{M} \subset \widehat{\mathcal{M}}$ にして、 $\widehat{\mathcal{M}}$ には現数が半連続且重調完備にして $\widehat{\mathcal{M}} \rightarrow \widehat{a} \geq 0$ に對し $\widehat{\mathcal{M}} \ni a_\nu \uparrow \widehat{a}$ なる a_ν が存在する。

証明 $\mathcal{M}$ を含む完全なる連続線形束 $\widehat{\mathcal{M}}$ にして、 $\widehat{\mathcal{M}} \ni \widehat{a} \geq 0$ に對し $a \in \widehat{\mathcal{M}} \ni a \uparrow \widehat{a}$ なる a_ν が存在するが如き $\widehat{\mathcal{M}}$ が存在する。(1)参照) $\sup \| a_\nu \| < \infty$ に對し $\| \widehat{a} \| = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \| a_\nu \|$ と定義して、 $\widehat{a}$ の全体を $\widehat{\mathcal{M}}$ とすれば $\widehat{\mathcal{M}}$ が以上の性質を満足することが知られる。同様にして次の定理が証明される。

定理 現数が沢半連続にして $\mathcal{M}$ が沢連続なるときは $\mathcal{M} \subset \widehat{\mathcal{M}}$ にして、 $\widehat{\mathcal{M}}$ には現数が沢半連続且沢重調完備にして $\widehat{\mathcal{M}} \rightarrow \widehat{a} \geq 0$ に對し $\widehat{a} = \bigvee a_\lambda$ なる $a_\lambda \in \mathcal{M}$ が存在する。

(1947. 8. 29)