



Title	規数線形束の諸性質 II
Author(s)	中野, 秀五郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1947, 2(6), p. 175-186
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75198
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

63. 規範線形束の諸性質 II

中野秀五郎

§4. 線形汎函数

$\mathcal{M}$ を連続なる線形束空間とする。 $\mathcal{M}$ に於ける線形汎函数 L が有素である
は任意の $a \geq 0$ に對し

$$\sup_{0 \leq x \leq a} |L(x)| < +\infty \quad \text{或は} \quad \sup_{|x| \leq a} L(x) < +\infty$$

なることである。線形汎函数の間に *semi-order* を $L_1(x) \geq L_2(x) \ (x \geq 0)$
なるとき $L_1 \geq L_2$ であると定義するときは $\mathcal{M}$ に於ける線形汎函数の全体 $\mathcal{L}$
は S - R 連続なる線形束空間を形成し L の正部は

$$L^+(a) = \sup_{0 \leq x \leq a} L(x) \quad (a \geq 0)$$

にて与えられる。(6) 参照) 又 $L = (-L)^+$ $|L| = L^+ + L^-$ と記すことは通常の通りである。

線形汎関数 L が $\lim_{\nu \rightarrow \infty} a_\nu = a$ に対し $\lim_{\nu \rightarrow \infty} L(a_\nu) = L(a)$ なるとき L は連続であるといふ。 L が連続なるときは L は有界である。(12) 参照 (2) に於ける証明なり, $a_\nu \downarrow 0$ に対し $\lim_{\nu \rightarrow \infty} L(a_\nu) = 0$ より L の連続が証明されることが容易に認められる。) 正線形汎関数系 P_λ が増加集合 即ち任意の $P_{\lambda_1}, P_{\lambda_2}$ に対し $P_{\lambda_1}, P_{\lambda_2} \leq P_\lambda$ なる P_λ が存在するとき,

$$P(a) = \sup_{\lambda} P_{\lambda}(a) < +\infty \quad (a \geq 0)$$

なるときは P も本連続にして $P = \bigcup_{\lambda} P_{\lambda}$ である。(12) 参照) 故に連続線形汎関数の全体を $\mathcal{F}$ とするときは $\mathcal{F}$ は $\mathcal{F}$ の正規部分空間である。即ち $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2$ にして $\mathcal{F}_1$ と $\mathcal{F}_2$ は互に直交する要より成る如く $\mathcal{F}$ が直和に分けられる。

定理 $\mathcal{M}$ が直交非有界, 即ち直交-極連続ならば $\mathcal{F} = \mathcal{F}_2$ である。

(証明は(7)を参照)

定理 $\lim_{\nu \rightarrow \infty} L_\nu = L$ ならば $\lim_{\nu \rightarrow \infty} L_\nu(a) = L(a)$ ($a \in \mathcal{M}$) である。

(2) 参照)

定理 $\mathcal{F} \ni L_\nu, \sup_{\nu} |L_\nu(a)| < +\infty$ ($0 \in \mathcal{M}$) ならば $\sup_{\nu} \left\{ \sup_{0 \leq x \leq a} |L_1(x)| \right\} < +\infty$ 即ち L_ν が弱有界ならば $|L_\nu|$ が弱有界である。

証明 $\alpha_\nu = \sup_{0 \leq x \leq a} |L_\nu(x)| \geq 2^{3\nu}$ ($\nu = 1, 2, \dots$) とするときは $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{1}{2} L_\nu(x) = 0$ なるべきを以て適当に式分列を選び, $2\alpha_{\mu\nu} < \alpha_{\mu\nu+1}$,

$$0 \leq a_{\mu\nu} \leq a \quad \left| \frac{1}{2^{\mu\nu}} L_{\mu\nu} \left(\frac{1}{\alpha_{\mu\nu}} a_{\mu\nu} + \dots + \frac{1}{\alpha_{\mu\nu-2}} a_{\mu\nu-1} \right) \right| \geq 1,$$

$$\left| \frac{1}{2^{\mu\nu}} L_{\mu\nu} \left(\frac{1}{\alpha_{\mu\nu}}, a_{\mu\nu} \right) \right| \geq 2^{\mu\nu} \quad \text{なる } a_{\mu\nu} \text{ が得られる。}$$

$$x = \frac{1}{\alpha_{\mu\nu}} a_{\mu\nu} + \frac{1}{\alpha_{\mu\nu-2}} a_{\mu\nu-1} + \dots \quad 0 \leq x \leq a$$

と導くときは,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2^{\mu\nu}} L_{\mu\nu}(x) \right| &\geq \frac{1}{2^{\mu\nu}} \left| L_{\mu\nu} \left(\frac{1}{\alpha_{\mu\nu}}, a_{\mu\nu} \right) \right| - 1 - \frac{1}{2^{\mu\nu}} \left| L_{\mu\nu} \left(\frac{1}{\alpha_{\mu\nu}} a_{\mu\nu+1} + \dots \right) \right| \\ &\geq 2^{\mu\nu} - 1 - \frac{1}{\alpha_{\mu\nu}} \left| L_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2^{\mu\nu}} a_{\mu\nu+1} + \frac{\alpha_{\mu\nu}}{\alpha_{\mu\nu+1} 2^{\mu\nu}} a_{\mu\nu+2} \right) \right| \\ &\geq 2^{\mu\nu} - 1 - 1 \end{aligned}$$

となつて矛盾する。此定理より直ちに次の定理が得られる。

定理 $L_\nu \in \mathcal{F}, \lim_{\nu \rightarrow \infty} L_\nu(a) = L(a)$ ($a \in \mathcal{M}$) ならば $L \in \mathcal{F}$

定理 $L \in \mathcal{F}_s$, $\lim_{\nu \rightarrow \infty} L_\nu(a) = L(a)$ ($a \in \mathcal{M}$) ならば $L \in \mathcal{F}_s$ にして
 及かも $a_\mu \downarrow 0$ 及び任意の正数 ε に對し μ_0 を適当に与へれば

$$\sup_{0 \leq x \leq a_{\mu\nu}} |L_\nu(x)| \leq \varepsilon \quad (\nu = 1, 2, \dots)$$

即ち L_ν が弱収斂すれば $|L_\nu|$ は一様連続である。

証明: 如何なる μ に對しても $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{0 \leq x \leq a_\mu} |L_{\lambda_\nu}(x) - L_{\rho_\nu}(x)| \right\} > \varepsilon > 0$, $\lambda_\nu \uparrow +\infty$, $\rho_\nu \uparrow +\infty$ であつたとする。今 $F_\nu = L_{\lambda_\nu} - L_{\rho_\nu}$ と置く。
 仮定より $\lim_{\nu \rightarrow \infty} F_\nu(x) = 0$ である。 $\forall p$, $a_{\mu_p} \geq a_{\mu_{p+1}}$ 及び $x_p \leq a_{\mu_p}$ ($p=1, 2, \dots$) を次の如くに認める。

$$\sup_{0 \leq x \leq a_{\mu\nu}} |F_{\lambda}(x)| \leq \frac{1}{4}\varepsilon \quad (\lambda = 1, 2, \dots, p-1) \text{ なる如く } a_{\mu_p} \text{ を}$$

$$|F_{\nu_p}((x_1 \sim a_{\mu_2} - a_{\mu_1}) + \dots + (x_{p-1} \sim a_{\mu_p} - a_{\mu_{p-1}}))| \leq \frac{1}{4}\varepsilon \text{ なる如く } \nu_p \text{ を}$$

$$|F_{\nu_p}(x_p)| \geq \varepsilon, \quad 0 \leq x_p \leq a_{\mu_p} \text{ なる如く } x_p \text{ を定めるときは}$$

$$x = (x_1 \sim a_{\mu_2} - a_{\mu_1}) + (x_2 \sim a_{\mu_3} - a_{\mu_2}) - \dots \leq x_1 \sim a_{\mu_2}$$

と置くときは

$$|F_{\nu_p}(x)| \geq |F_{\nu_p}(x_p \sim a_{\mu_{p+1}} - a_{\mu_{p+1}})| - \frac{1}{4}\varepsilon - \frac{1}{4}\varepsilon$$

$$\geq |F_{\nu_p}(x_p)| - |F_{\nu_p}(x_p \sim a_{\mu_{p+1}})| - \frac{1}{2}\varepsilon \geq \varepsilon - \frac{3}{4}\varepsilon = \frac{1}{4}\varepsilon$$

となつて矛盾する。故に $\varepsilon > 0$ に對し ν_0 a_p を定めると

$$\sup_{0 \leq x \leq a_p} |L_\nu(x) - L_\mu(x)| \leq \varepsilon \quad (\nu, \mu \geq \nu_0)$$

となり 只 $\sup_{0 \leq x \leq a_{p_0}} |L_\nu(x)| \leq \varepsilon$ ($\nu = 1, 2, \dots, \nu_0$) なる如く $a_{p_0} \leq a_p$ を定めると

$$\sup_{0 \leq x \leq a_{\mu\nu}} |L_\nu(x)| \leq 2\varepsilon \quad (\mu \geq \nu_0)$$

となる。さらに L_ν は一様連続である。

一様連続なることより直ちに次の定理が知られる。

定理 $L \in \mathcal{F}_s$ が L に弱収斂し $\lim_{\nu \rightarrow \infty} x_\nu = x$ ならば $\lim_{\nu \rightarrow \infty} L_\nu(x_\nu) = L(x)$ 。

次の定理も容易に証明される。

定理 $L \in \mathcal{F}_s$ が一様連続にして $\lim_{\nu \rightarrow \infty} L_\nu(x_\mu)$ が収斂し $\lim_{\mu \rightarrow \infty} x_\mu = x$ ならば $\lim_{\nu \rightarrow \infty} L_\nu(x)$ も又収斂する。

定理 $\mathcal{M}$ が直交一様連続ならば, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0$ である。

証明は(7)を参照, 此証明と同様にして次の定理が証明される。

定理 $\mathcal{M}$ が直交一様連続にして, L が弱有界ならば, L は一様連続である。

$\mathcal{M}$ が汎連続なる場合, 連続線形汎函数 L に対して $\bigwedge_{\lambda} a_{\lambda} = 0$ に対して

$$\inf |aL(a_{\lambda_1} \wedge \dots \wedge a_{\lambda_n})| = 0$$

なるとき, L は汎連続であるといふ。汎連続なる線形汎函数の全体を $\mathcal{F}_0$ とすれば, $\mathcal{F}_0$ は $\mathcal{F}$ の正閉部分空間である。即ち $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 + \mathcal{F}_0^\perp$ なる直和に表はされる。連続の場合と同様にして次の定理が証明される。

定理 $L \in \mathcal{F}_0$, $\lim_{\nu \rightarrow \infty} L_\nu(a) = L(a)$ ($a \in \mathcal{M}$) ならば, $L \in \mathcal{F}_0$ にして, L は一様汎連続である。即ち任意の正数 ε 及び $\bigwedge_{\lambda} a_{\lambda} = 0$ に対して $a = a_{\lambda_1} \wedge \dots \wedge a_{\lambda_n}$ を適当に定めるときは,

$$\sup_{0 \leq x \leq a_{\lambda_1} \wedge \dots \wedge a_{\lambda_n}} |L_\nu(ax)| \leq \varepsilon \quad (\nu = 1, 2, \dots)$$

が成立する。

定理 $L_\nu \in \mathcal{F}_0$ が一様汎連続, $\bigvee_{\lambda} a_{\lambda} = a$ に対して $\lim_{\nu \rightarrow \infty} L_\nu(a_{\lambda_1} \vee \dots \vee a_{\lambda_n})$ が収斂ならば $\lim_{\nu \rightarrow \infty} L_\nu(a)$ も亦収斂である。八の場合も同様である。

又次の定理は明かである。

定理 $\mathcal{M}$ が超汎連続ならば, $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_0$ である。

$P(|a|) = 0$ ならば $a = 0$ なるが如き連続なる正汎函数が存在するとき $\mathcal{M}$ は正則であるといふ。

定理 $\mathcal{M}$ が正則ならば, $\mathcal{M}$ は超汎連続である。

証明: $\|a\| = P(|a|)$ と考へるときは 此規範は連続なるを以て, §2 により超汎連続である。

§5. 再線形化

$\mathcal{M}$ を汎連続なる線形束空間とする。 $\mathcal{M}$ に於ける汎連続なる線形汎函数の全体を $\overline{\mathcal{M}}$ にて表はすときは, $\overline{\mathcal{M}}$ は又汎連続なる線形束空間である。 $\overline{\mathcal{M}}$ を $\mathcal{M}$ の共軛空間と呼ぶこととする。 $\bar{a} \in \overline{\mathcal{M}}$ に対して $\bar{a}(a) = a(a)$ と考へることにより

$a \in \mathcal{M}$ は又 $\overline{\mathcal{M}}$ の汎連続なる線形汎函数である。

次に $\mathcal{M}$ に関して次の定義を設ける。

1) 半正則: 任意の $a \in \mathcal{M}$, $a \neq 0$ に對し, $\bar{a}(a) \neq 0$ なる $\bar{a} \in \overline{\mathcal{M}}$ が存在する。

2) 正則: 適当なる $\bar{a} \in \overline{\mathcal{M}}$, $\bar{a} \neq 0$ に對し, $\bar{a}(a) = 0, a \geq 0$ ならば $a = 0$ 。

3) 局所正則: 任意の射影子 $[p]$ に對し, $[p]\mathcal{M}$ が正則。

$\mathcal{M}$ が半正則なるときは $\mathcal{M} \subset \overline{\mathcal{M}}$ なることが知られる。特に $\mathcal{M} = \overline{\mathcal{M}}$ なるとき, $\mathcal{M}$ は再帰であると言ふ。任意の $\mathcal{M}$ に對し, $\overline{\mathcal{M}}$ は再帰である。

4) 弱完備: $0 \leq a_\lambda \in \mathcal{M}$ ($\lambda \in \Lambda$), $\sup \bar{a}(a_\lambda, \dots, a_{\lambda_n}) < +\infty$ ($0 \leq \bar{a} \in \overline{\mathcal{M}}$) ならば, $a_\lambda \leq a \in \mathcal{M}$ なる a が存在する。

定理 $\mathcal{M}$ が再帰なる爲の必要上充分なる條件は $\mathcal{M}$ が弱完備なることである。(証明は(2)を参照されたい)

§4に於ける正則の場合と同様、次の定理が成立する。

定理 $\mathcal{M}$ が局所正則なるときは $\mathcal{M}$ は超汎連続である。

更に次の定理の成立することが容易に認められる。

定理 $\mathcal{M}$ が半正則、超汎連続にして $\overline{\mathcal{M}}$ が係数完備なるときは $\mathcal{M}$ は局所正則である。

$\mathcal{M}$ に属する要素系 a_λ ($\lambda \in \Lambda$) 及び $0 \leq \bar{a} \in \overline{\mathcal{M}}$ なる任意の $\bar{a}$ に對し,

$$\pi(\bar{a}) = \sup_{\lambda} \bar{a}(a_\lambda) = \sup_{\lambda} \left\{ \sup_{\substack{\mu \in \Lambda \\ \mu \leq \lambda}} \bar{a}(a_\mu) \right\}$$

と言き、次の定義を設ける。

5) 弱有界: $\pi(\bar{a}) < +\infty$ ($\bar{a} \in \overline{\mathcal{M}}$)

6) 一様弱連続: $\bar{a}_\nu \rightarrow 0$ ならば $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \pi(\bar{a}_\nu) = 0$ 。

7) 一様弱汎連続: $\bigwedge_p \bar{a}_p = 0$ ならば $\inf \pi(a_p, \dots, a_{p_\nu}) = 0$

§4にて証明せし如く, $\sup_{\lambda} \bar{a}(a_\lambda) < +\infty$ ($\bar{a} \in \overline{\mathcal{M}}$) ならば $\pi(\bar{a}) < +\infty$ である。7) $\rightarrow$ 6) なることは明かである。又 $\mathcal{M}$ が超汎連続なるときは 6) $\rightarrow$ 7) なることも容易に認められる。

次に $\mathcal{M}$ に $\overline{\mathcal{M}}$ による弱位相を導入する。即ち, $\bar{a}_{\lambda_1}, \dots, \bar{a}_{\lambda_r} \in \overline{\mathcal{M}}$ 及び $\alpha_1 < \beta_1, \dots, \alpha_r < \beta_r$, に對し $\{a: \alpha_1 < \bar{a}_{\lambda_1}(a) < \beta_1, \dots, \alpha_r < \bar{a}_{\lambda_r}(a) < \beta_r\}$

を近傍系とする位相を与えるときは、次の定理が成立する。

定理 $\pi(\bar{a}) < +\infty$ ($0 \leq \bar{a} \in \overline{\mathcal{M}}$) として、 $\bigwedge \bar{a}_\lambda = 0$ に対して、
 $\inf \pi(\bar{a}_\lambda, \dots, \bar{a}_{\lambda'}) = 0$ ならば、再帰なる $\overline{\mathcal{M}}$ に対して、

$$\mathcal{O} = \{a : \bar{a}(|a|) \leq \pi(\bar{a})\}$$

は弱位相に関して *bicompat* である。

証明: $p(\bar{a})$ ($\bar{a} \in \overline{\mathcal{M}}$) が $\bar{a}_{\lambda_1}, \dots, \bar{a}_{\lambda_\nu} \in \overline{\mathcal{M}}$, $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\nu > 0$ に対して、
 $|\bar{a}_{\lambda_1}(a) - p(\bar{a}_{\lambda_1})| < \varepsilon_1, \dots, |\bar{a}_{\lambda_\nu}(a) - p(\bar{a}_{\lambda_\nu})| < \varepsilon_\nu$

なる a が存在するとき、 p が $\overline{\mathcal{M}}$ に於ける線形汎関数として、然かも、

$\sup_{|z| \leq \bar{a}} |p(z)| \leq \pi(\bar{a})$ なることが容易に証明される。

此定理より直ちに次の定理が得られる。

定理 $\overline{\mathcal{M}}$ が再帰ならば、 $a < b$ に対して、

$$\mathcal{O} = \{x : a \leq x \leq b\}$$

なる $\mathcal{O}$ は弱位相に関して *bicompat* である。

$\overline{\mathcal{M}}$ の要素列 $a_1, a_2, \dots$ の弱収束に同じ次の定義を設ける。

8) 弱収束: $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \bar{a}(a_\nu) = \bar{a}(a)$ ($\bar{a} \in \overline{\mathcal{M}}$) なるべき $w\text{-}\lim_{\nu \rightarrow \infty} a_\nu = a$ と記す。

9) 絶対弱収束: $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \bar{a}(|a_\nu - a|) = 0$ ($\bar{a} \in \overline{\mathcal{M}}$) なるとき、
 $a\text{-}w\text{-}\lim_{\nu \rightarrow \infty} a_\nu = a$ と記す。

$a\text{-}w\text{-}\lim_{\nu \rightarrow \infty} a_\nu = a$ より $w\text{-}\lim_{\nu \rightarrow \infty} a_\nu = a$ の得られることは明かである。

又 §4 より次の定理の成立することが知られる。

定理 $\overline{\mathcal{M}}$ が再帰として、任意の $\bar{a} \in \overline{\mathcal{M}}$ に対して $\bar{a}(a_\nu)$ が収束ならば、
 $w\text{-}\lim_{\nu \rightarrow \infty} a_\nu$ が存在する。

定理 $\overline{\mathcal{M}}$ が超汎連続且半正則なるとき、 $a\text{-}w\text{-}\lim_{\nu \rightarrow \infty} a_\nu = a$ ならば、
 $s\text{-}ind\text{-}\lim_{\nu \rightarrow \infty} a_\nu = a$ である。

証明: $\overline{\mathcal{M}}$ が正則なときは正則正汎関数 $\bar{a}$ に対して $\bar{a}(|a|) = \|a\|$ と考へれば断かに定理が成立する。 $\overline{\mathcal{M}}$ が超汎連続且半正則なるときは、適当な射影子列 $[p_\nu] \subseteq [p_2] \subseteq \dots$ に対して、 $[p_\nu] \overline{\mathcal{M}}$ が正則、且 $\lim_{\nu \rightarrow \infty} [p_\nu] a_\mu = a_\mu$ ($\mu = 1, 2, \dots$) なるが如き $[p_\nu]$ が存在する、故に対角線力法により

$a-w-\lim_{\nu \rightarrow \infty} a_\nu = a$ ならば $\text{ind-}\lim_{\mu \rightarrow \infty} [p_\nu] a_{\nu\mu} = a_\nu$ なるが如き部分列 $a_{\nu\mu}$ が得られる。従つて $[p_\nu] \text{ind-}\lim_{\mu \rightarrow \infty} a_{\nu\mu} = [p_\nu] \text{ind-}\lim_{\mu \rightarrow \infty} a_{\nu\mu}$ より $\nu \rightarrow \infty$ に對し $\text{ind-}\lim_{\mu \rightarrow \infty} a_{\nu\mu}$ の存在が知られる。

定理 $\mathcal{M}$ が再帰して完全要素 $a \geq 0$ を有し且正則なるときは、一様連続なる要素列 $a_1, a_2, \dots$ は弱収斂する部分列を有する。

証明： 任意の有理数 α に對し、射影子 $[(a - \alpha a)^+]$ を含む最小な射影子環を $\mathcal{R}_\alpha$ とする。即ち $\mathcal{R}_\alpha \ni [p], [q]$ ならば、 $\mathcal{R}_\alpha \ni [p][q], [a] - [p]$ とする。然るときは、 $\mathcal{R}_\alpha$ は明かに可附置個の射影子より成る。次に $\mathcal{M}$ に於ける正則なる正線形汎函数 $\bar{a}$ に對し、 $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \bar{a}(|[p_\nu]a - [p]a|) = 0$, $[p_\nu] \in \mathcal{R}_\alpha$ なる射影子 $[p]$ の全体を $\mathcal{R}$ とするとき、 $\mathcal{R}$ は又射影子環にして $[p_\nu] \downarrow [p]$, $[p_\nu] \in \mathcal{R}$ ならば、 $[p] \in \mathcal{R}$ である。 $\mathcal{M}$ の要素 x に對し、任意の α に對し、 $[(x - \alpha a)^+]$ $\in \mathcal{R}$ なる x の全体を $\mathcal{M}_0$ とすれば、スペクトル論により $\mathcal{M}_0$ は連続なる線形像空間にして、 $\mathcal{M}_0$ に於ける射影子の全体が $\mathcal{R}$ と一致することが容易に認められる。今 a_ν の部分列 $a_{\nu\mu}$ に對し、 $\bar{a}([p]a_{\nu\mu})$ ($\mu = 1, 2, \dots$, $[p] \in \mathcal{R}_\alpha$) が収斂なるが如き $a_{\nu\mu}$ を選出すときは、任意の $[p] \in \mathcal{R}$ に對しても $\bar{a}([p]a_{\nu\mu})$ は収斂する。如何となれば $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \bar{a}(|[p_\nu]a - [p]a|) = 0$, $[p_\nu] \in \mathcal{R}_\alpha$ なる $[p_\nu]$ が存在し $\bar{a}(|[p_\nu]a - [p]a|) = |\bar{a}[p_\nu] - \bar{a}[p]|(a)$ なるべきを以て、 $\|\bar{a}[p_\nu] - \bar{a}[p]\| = |\bar{a}[p_\nu] - \bar{a}[p]|(a)$ と考へることにより $\mathcal{M}_0$ にて $s\text{-}\text{ind-}\lim_{\nu \rightarrow \infty} \bar{a}[p_\nu] = \bar{a}[p]$ である。然るに $\bar{a}[p_\nu] \leq \bar{a}$ より部分列 $[p_{\nu\mu}]$ を適当に定めれば $\lim_{\mu \rightarrow \infty} \bar{a}[p_{\nu\mu}] = \bar{a}[p]$ となる。故に $\{a\}$ に對し $\bar{a}([p]a_{\nu\mu})$ の収斂することが知られる。任意の $\bar{x} \in \mathcal{M}$ は $\mathcal{M}_0$ に於ける連続線形汎函数と考へられるを以て、スペクトル論により $\bar{x} = \int \lambda d\bar{x}[\lambda] \bar{a}$ となるを以て $\{a\}$ に對し $\bar{x}(a_{\nu\mu})$ の収斂することが知られる。

定理 $\mathcal{M}$ が再帰して、超汎連続なるときは、一様連続なる要素列 $a_1, a_2, \dots$ は弱収斂する部分列を有する。

証明： 射影子列 $[p_1] \leq [p_2] \leq \dots$ を正当に定めると、 $\lim_{\nu \rightarrow \infty} [p_\nu] a_\mu = a_\mu$ に對し、 $[p_\nu] \mathcal{M}$ が正則となる。故に前定理により部分列 $a_{\nu\mu}$ に對し

$[p_\nu]$ 列にて弱収束する。即ち $[p_\nu] a_{\nu\mu}$ が弱収束する如く得られる。然るときは任意の $\bar{a} \in \mathcal{M}$ に對し、 $\bar{a}([p_\nu] a_{\nu\mu})$ が弱収束し、然かも $\overline{\mathcal{M}}$ にて $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \bar{a}([p_\nu] a_{\nu\mu}) = \bar{a}_0$ と書くときは $\frac{1}{2}$ より $\bar{a}_0(a_{\nu\mu})$ が弱収束する。此処に明かに $\bar{a}_0(a_{\nu\mu}) = \bar{a}(a_{\nu\mu})$ である。

注意 $\mathcal{M}$ の要素列 a_ν が有界、即ち $|a_\nu| \leq A$ なる A が存在するときは a_ν は明かに一様収束である。又 $\overline{\mathcal{M}}$ が一様連続なときは、弱有界なる要素列 a_ν は一様連続なることも容易に認められる。

§ 6. 再 歸 規 則

先づ規範線形空間 $\mathcal{M}$ に於ける線形汎函数に就て考へることとする。 $\mathcal{M}$ に於ける線形汎函数 L が 規範有界 とは

$$|L(a)| \leq \alpha \|a\| \quad (a \in \mathcal{M})$$

なることとする、従つて通常の場合に L の 規範 を

$$\|L\| = \sup_{\|a\| \leq 1} |L(a)|$$

にて定義する。 L が規範有界なるとき、 L が有界、即ち

$$\sup_{\|x\| \leq a} |L(x)| < +\infty \quad (0 \leq a \in \mathcal{M})$$

なることは明かである。茲に次の定理が成立する。

定理 $\mathcal{M}$ が完備規範空間を有すれば、有界なる L は規範有界である。

証明は (B) を参照されたい。又次の定理は明かに成立する。

定理 $\mathcal{M}$ が連続規範空間を有すれば、規範有界なる L は連続である。逆に次の定理が成立する。

定理 $\mathcal{M}$ の規範が連続でないときは、連続でない規範有界な L が存在する。

証明 $\mathcal{M}$ の規範が連続でないときは、適当な正要素 a 及び射影子列

$[p_\nu] \downarrow [0]$ に對し $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \|[p_\nu] a\| = \alpha > 0$ である。今

$$P(\alpha_1([p_1] - [p_2])a + \alpha_2([p_2] - [p_3])a + \cdots + \alpha_\nu([p_\nu] - [p_{\nu+1}])a) = a_{\nu+1}$$

と定義するときは、 $[p_\nu] a$ ($\nu = 1, 2, \dots$) を含む最小なる線形空間に於て

P は線形汎函数で、然かも、

$$|P(\alpha_1([p_1] - [p_2])a + \cdots + \alpha_\nu([p_\nu] - [p_{\nu+1}])a)| = |\alpha_\nu| \leq \|\alpha_1([p_1] - [p_2])a + \cdots + \alpha_\nu([p_\nu] - [p_{\nu+1}])a\|$$

が成立する。故に *Emanack* の拡大定理により、 P は $\mathcal{M}$ の全部へ拡大され、 $|P(x)| \leq \|x\|$ が成立する。此 P に対しては $\lim_{p \rightarrow \infty} P([p]a) = \alpha > 0$ なるを以て P は連続ではない。

$\mathcal{M}$ が汎連続にして、規数か完備規数なるときは、 $\mathcal{M}$ に於ける汎連続なる線形汎函数は規数有界なるを以て、 $\mathcal{M}$ の共軛空間 $\overline{\mathcal{M}}$ には規数が与えられる。此 $\overline{\mathcal{M}}$ を $\mathcal{M}$ の 共軛規数空間 と呼ぶ。

定理 共軛規数空間は再帰にして其規数は半汎連続且汎連続完備規数である。従つて完備規数である。

証明 $\mathcal{M}$ が再帰なることは明かである。又半汎連続且汎連続完備なることは前談話 “*Reflexive vector lattice* の *norm* に就て” 定理 i の証明が其處適用される。

$\mathcal{M}$ の要素系 a_λ ($\lambda \in \Lambda$) に対し $\sup_\lambda \|a_\lambda\| < +\infty$ なるとき、 a_λ に 規数有界 であるといふ。 $\mathcal{M}$ が共軛規数空間 $\overline{\mathcal{M}}$ を有するとき次の定理の成立することは容易に認められる。

定理 a_λ が規数有界なること、弱有界なることは同等である。

定理 $\overline{\mathcal{M}}$ の規数が連続規数なるときは、 $\mathcal{M}$ の規数有界なる要素系 a_λ は一様汎連続である。

$\overline{\mathcal{M}}$ の規数が連続規数なる層の充満条件としては次の定理がある。

定理 $\mathcal{M}$ の規数が 一様個 即ち任意の正数 $\varepsilon, \varepsilon'$ に対し 正数 δ を適当に定めるときは $a \wedge b = 0, \|a\| \geq \varepsilon, \|b\| \leq \delta$ に対して $\|a+b\| \leq \|2\| + \varepsilon' \|b\|$ が成立するならば、 $\overline{\mathcal{M}}$ の規数は一様増加である。従つて当然連続規数である。

証明は (2) を参照されたい。以上の定理により §5 に於ける弱収数に関する定理が規数線形系に應用される。

$\mathcal{M}$ が再帰にして、其共軛規数空間 $\overline{\mathcal{M}}$ に対し

$$\|a\| = \sup_{\| \bar{a} \| \leq 1} |\bar{a}(a)| \quad (a \in \mathcal{M})$$

なるとき、 $\mathcal{M}$ の規数を 再帰規数 と云ふ。再帰規数にしては既に前談話にて記したから略すこととする。§4 より直ちに次の定理が得られる。

定理 M が再帰規数空間なるときは、 M の要素列 a_n が任意の $a \in M$ に対し、 $\bar{a}(a_n)$ が収数ならば、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{a}(a_n) = \bar{a}(a)$ なる $a \in M$ が存在する。

定理 再帰規数空間 M が超汎連続ならば、一般汎連続なる要素列 a_n に対し、弱収数する部分列が得られる。

定理 再帰規数空間 M が超汎連続にして、 M が連続規数なるときは、規数有界なる要素列 a_n は弱収数する部分列を有する。

任意の規数線形束 M は再帰規数空間に拡大できるのである。先づ M を完備規数なる様に拡大出来ることは、*Canlor* の方法で明かである。故に M は完備規数を有するとする。*Banach* の定理により任意の要素 $a \neq 0$ に対し、 $L(a) \neq 0$ なる規数有界なる線形汎函数が存在する。故に M に於ける規数有界なる線形汎函数の全体を $\tilde{M}$ とすれば $\tilde{M}$ は再帰空間である。(6)参照)

$\tilde{M}$ の共軛規数空間 $\overline{\tilde{M}}$ が M の拡大にして、再帰規数空間である。然かも $\overline{\tilde{M}}$ の共軛規数空間は $\tilde{M}$ である。此 $\overline{\tilde{M}}$ を M の汎函数拡大と呼ぶこととする。 M が再帰規数空間にあつても、 M の汎函数拡大は必ずしも M と一致しないのである。其れが一致するのは M の規数が連続規数の場合に限ることは以上の場より明かである。(8)参照)

次に規数線形束が再帰規数空間なる為の条件として次の定理が成立する。

定理 規数線形束 M が再帰規数空間なる為の必要且充分なる条件は、

1) M が汎連続、2) 汎連続規数、3) 汎量個完備規数 4) 任意の $a \neq 0$ 及び正数 ε に対し、 $|L(a)| \geq \|a\| - \varepsilon$ 、 $\|L\| \leq \gamma$ なる汎連続線形汎函数 L が存在することである。

此定理は前談話の最後の定理より直ちに得られる。

定理 規数線形束 M が、前定理の条件 1), 2), 3) 及び、任意の要素 $a \neq 0$ に対し、 $[0] \neq [p] \leq [a]$ にして $[p] M$ が連続規数なるが如き射影子 $[p]$ が存在するときは、 M は再帰規数空間である。

証明： 前定理の 4) が満足されることを証明すればよい。任意の $a \neq 0$ に対し、仮定に依り、 $[p_\lambda] \leq [a]$ して $[p_\lambda] M$ が連続規数なるが如き $[p_\lambda]$ の全体に対しては明かに $\cup [p_\lambda] | a| = |a|$ である。然かも $[p_{\lambda_1}]$, $[p_{\lambda_2}]$

$\mathcal{L}$ に対しては $[p_{\lambda_1}] \cup [p_{\lambda_2}] = [p_{\lambda}]$ なる入水存在する。故に仮定の 2) により $\sup \| [p_{\lambda}] a \| = \| a \|$ なるを以て、任意の正数 ε に対し $\| [p_{\lambda}] a \| \geq \| a \| - \varepsilon$ なる $[p_{\lambda}]$ が存在する。 $[p_{\lambda}] \mathcal{M}$ は連続線形関数なるに より、 $[p_{\lambda}] \mathcal{M}$ は連続線形関数有界なる $\mathcal{L}$ は連続である。Banach の定理により $\| \mathcal{L}([p_{\lambda}] a) \| = \| [p_{\lambda}] a \|$, $\| \mathcal{L} \| \leq 1$ なる $\mathcal{L}$ が存在する。此 $\mathcal{L}$ に対しては $|\mathcal{L}(a)| = |\mathcal{L}([p_{\lambda}] a)| \geq \| a \| - \varepsilon$ なるを以て 4) が満足される。此定理の特別の場合として次の定理が成立する。

定理 線形形束 $\mathcal{M}$ が連続にして、連続線形関数上重調完備線形関数なるときは、 $\mathcal{M}$ は再帰線形関数空間である。然かも $\mathcal{M}$ は汎函数拡大と一致する。(B 参照)
此定理に記せる $\mathcal{M}$ を K -空間と名づけて小笠原君が談話 240 号で多くの結果を得て居る。先づ K -空間 $\mathcal{M}$ の共軛空間 $\overline{\mathcal{M}}$ が又 K -空間なるときは $\mathcal{M}$ は Banach の意味で正則である。此れは $\overline{\mathcal{M}}$ が $\mathcal{M}$ に於ける線形関数有界なる線形関数の全体より成ることより明かである。然かも此定理の逆が成立するのである。即ち線形形束 $\mathcal{M}$ が Banach の意味にて正則なるときは $\mathcal{M}$ 及び $\overline{\mathcal{M}}$ は K -空間である。如何となれば、此場合は $\mathcal{M}$ は先づ汎函数拡大と一致すべきを以て、 $\mathcal{M}$ は K -空間、同様にして $\overline{\mathcal{M}}$ も K -空間である。

次に K -空間 $\mathcal{M}$ は弱完備であると云つて、 $\mathcal{M}$ に於ける要素列 a_n が (0) -有界 即ち $|a_n| \leq a$ なる a が存在して、任意の $\bar{a} \in \overline{\mathcal{M}}$ に対し $\bar{a}(a_n)$ が収束するとき a_n が弱収束なることを証明してゐる。此場合 (0) -有界なる仮定の不要なることは §5 より明かである。

又 K -空間に於ては (0) -有界なる要素列は弱収束する部分列を有することを証明してあるが、 (0) -有界なる仮定は一樣弱連続なる仮定に拡張されることも §5 より明かである。

最後に、 K -空間 $\mathcal{M}$ は $\overline{\mathcal{M}}$ に於ける連続線形関数の全体と一致することを述べてあるが、此れは、正しくないのである。 $\mathcal{M}$ は再帰、即ち $\overline{\mathcal{M}}$ の連続線形関数の全体と一致はするが、必ずしも連続線形関数の全体とは一致しない。

例に其例を与へる。 $a(t)$ を $-\infty < t < +\infty$ に於ける可附番個の点を除いて 0 なる函数にして、 $\| a \| = \sum_t |a(t)|$ が有限なるが如き函数の全体を

$\mathcal{M}$ とすれば, $\mathcal{M}$ は K -空間である. $\overline{\mathcal{M}}$ は連続の有界函数より成る.

今実数全体を整列して t_i とする. $\overline{a}_\eta(t_i)$ を $i \in \mathbb{N}$ に對し $\overline{a}_\eta(t_i) = 1$ にして, $i < \eta$ に對し $\overline{a}_\eta(t_i) = 0$ とすれば, 明らか $\overline{a}_\eta \in \overline{\mathcal{M}}$ である. 射影子 $[a]$ に對應する $\overline{\mathcal{M}}$ の *Eigenraum* ((2) 参照) に於ける近傍を $\mathcal{U}[a_\eta]$ とし $\pi_\eta \mathcal{U}[a_\eta] \ni p_0$ なる点 p_0 を考へる. 即ち $[a_\eta]$ の總てを含む *Maximal ideal* の一つを p_0 とする. 然るときは $\overline{\mathcal{M}}$ に含まれる常數 1 に對し,

relative spection $(\frac{a}{1}, p_0)$ は, $\overline{\mathcal{M}}$ の連続線形汎函数ではあるが 連続性ではない. ((5) 参照) 故に $(\frac{a}{1}, p_0)$ は $\mathcal{M}$ に含まれない. 如何となれず $\mathcal{M}$ に含まれる a は悉く $\overline{\mathcal{M}}$ の連続線形汎函数である.

(1947. 8. 29)