



Title	非線型微分方程式論に於けるリミットサイクルの実際的決定法に就て（Ⅰ）
Author(s)	清水，辰次郎；ト部，小十郎
Citation	全国紙上数学談話会．1947，2(6)，p. 191-192
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75201
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

66. 非線型微分方程式論に於ける リミットサイクル の實際的決定法に就て (I)

清水 辰次郎

ト 部 小 十 郎

非線型微分方程式論に於ける *limit cycle* の問題は理論上からも應用上からも極めて重要なことが知られてゐる。然るにその研究は局所的性質の外は *Poincaré, Bendixson* 以來余り知られてゐない。

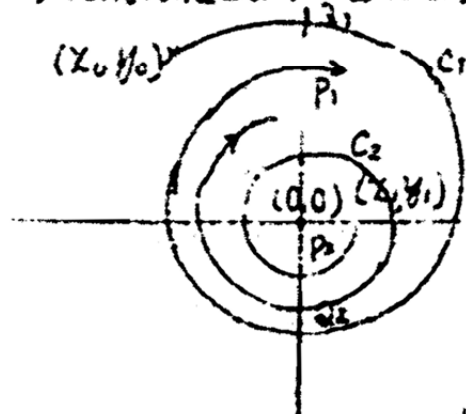
實際に与へられた方程式に於けるリミットサイクルの存在の決定は極めて困難な問題とされてゐる。

此處に數次により非線型方程式の解を近似的に画かしめそれによりリミットサイクルの存在を判定し得る場合を述べよう。勿論解法機を信用すればリミットサイクルの存在は圖上に現はれるものではあるが誤差の影響を少しとするも無限時間遡ることとは不可解なる故リミットサイクルの存在を主張するためには多少の考慮を必要とする。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)} \quad \text{又は} \quad \frac{dy}{dt} = Q(x,y), \quad \frac{dx}{dt} = P(x,y)$$

に於て理論上必要ではないが機械の性質上 P, Q は x, y の多項式とし $P(x,y) = 0, Q(x,y) = 0$ の共通根は $(0,0)$ のみとする。

今微分方程式解法器により下図の如き解曲線を画いたとする。



$(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ を夫々初期値とする。

解 C_1, C_2 に対し P_1Q_1 上のすべての点にて $\frac{dx}{dt} > 0$, P_2Q_2 上のすべての点にて $\frac{dx}{dt} < 0$ が示し得られるならば C_1 と C_2 との間はリミットサイクルの存在が証せられる。何者、 C_1 は

夫自点と交はらぬから ∞ に向ふならば P_1Q_1 を逆の方向に切らなければならぬ。それは $\frac{dx}{dt} > 0$ に矛盾する。又 C_1 が $(0,0)$ に収斂するならば同じく P_2Q_2 を横切らねばならぬから $\frac{dx}{dt} < 0$ に矛盾する。

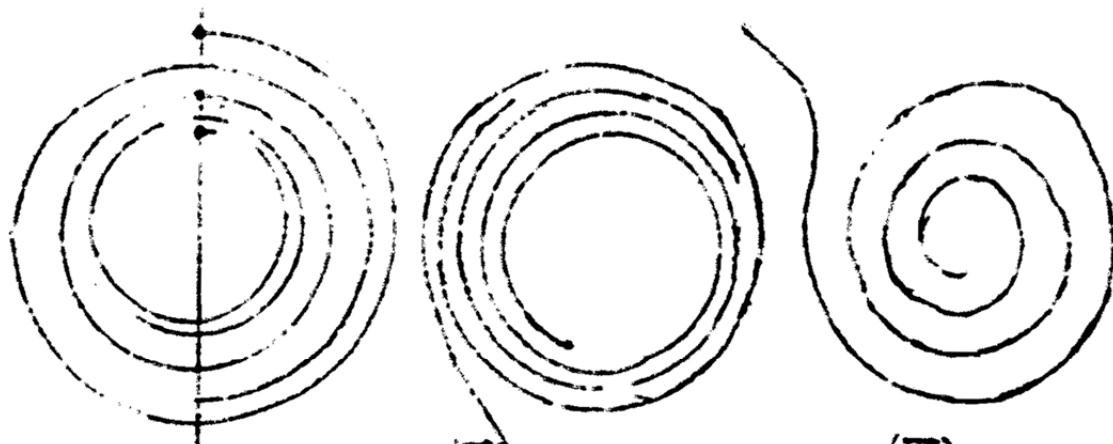
例. *Bush* 型微分方程式解法器により

$$(I) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-x + \mu(1-x^2)y}{y} \quad \mu = 0.1$$

$$(II) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-x + \frac{y}{2}(1-x^2)y}{y} \quad \mu = 0.1$$

$$(III) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-x + \mu(1-x^3)y}{y} \quad \mu = 0.1$$

を解くことにより、



(I)

$$y=0 \quad y=0 \quad y=0 \\ x=+3cm \quad x=+2.0m \quad x=1.5cm$$

(実物縮小ス)

(II)

$$y=0 \quad y=0 \\ x=-3cm \quad x=-1cm$$

(実物縮小ス)

(III)

$$y=0 \\ x=-1cm$$

(実物縮小ス)

(I)(II)がリミットサイクルが存在しその形も大体図の如きもの(プリントの割合上発振より縮小少し)なることがわかる。(III)は $|x| < 5$, $|y| < 5$, $|x| \neq 0$, $|xy| > 1$ なるリミットサイクルのないことは図の示す如くであるが $|x| > 5$, $|y| > 5$ には $\frac{dy}{dx}$ の同じ値をとる曲線を画けば容易にわかるようにリミットサイクルはあり得ない。又 $|x| < 1$, $|y| < 1$ には

$\iint \mu(1-x^3) dx dy > 0$ なることから同じくリミットサイクルの存在し得ないことがわかる。

以上のことから $\ddot{x} - \mu(1-x^m)\dot{x} + x = 0$ (但し $x=y$ と置く)の解は m が偶数で次第に大となると $|x|=1$, $|y|=1$ なる位置に近づくリミットサイクルがあり奇数のときにはリミットサイクルはないらしいこともわかる。 m が2より大なる偶数の場合リミットサイクルの形は知られていないか存在することはVan der Pol, Lienard 等によつて証明せられてゐる。次には今迄に知られていない方程式についてリミットサイクルの存否を考へよう。

註 我國に於ては機械による未知の微分方程式の解に関する発表は本稿が最初ではないかと思ふ。

(1947. 9. 8)