68 Group ノ central extension ニ就テ

1947.9.9 (阪大) 永尾 汎

$\mathfrak{G}$ ガ normal-subgroup $\mathfrak{N}$ ヲ含ミ, 且 $\mathfrak{G}/\mathfrak{N} \cong \mathfrak{L}$ ナルトキ $\mathfrak{G}$ ハ $\mathfrak{N}$ ノ $\mathfrak{L}$ ニ由ル extension デアルトイヒマス. 先ヅ $\mathfrak{N}$ ト $\mathfrak{L}$ ヲ与ヘテ $\mathfrak{N}$ ノ $\mathfrak{L}$ ニ由ル extension ヲスベテ求メル事ガ所謂 group ノ extension ノ問題デ コノ問題ニ関シテハ最初 O. Schreier ガ條件ヲ出シ 後正田先生ガ別ノ立場カラコノ條件ヲ出サレマシタ。コヽデハ $\mathfrak{N}$ モ $\mathfrak{L}$ モ共ニ有限 Abel 群トシ, $\mathfrak{N}$ ヲ center ニ含ム様ナ $\mathfrak{N}$ ノ $\mathfrak{L}$ ニ由ル extension ヲ "central extension" ト呼ブコトニシテ先ヅ正田先生ノ條件ニ由リスベテノ central extension ヲ求メマス (§1) ソシテ更ニソノ central extension ノ commutator subgroup 及 center ヲ決定シ (§3) 又 extension ノ type ヲ定義シテソノ作ル群ヲ決定シタイト思ヒマス. (§4). 最後ニ種々御指導ヲ受ケマシタ正田先生ニ対シ感謝イタシマス。

§1. Fundamental theorem

先ヅ正田先生ノ定理及 Zassenhaus ノ Lehrbuch der Gruppentheorie ニアル定理ヲ証明ナシニアゲマス.

[正田ノ theorem]

$\mathfrak{L}$ ガ generator ノ set $B=\{b_i\}$ ト defining relation ノ set $R=\{r\}$ ニ由リ与ヘラレテヰルトスル。

次ノ任意ノ group $\mathfrak{N}$ ニ対シ, B カラ生成サレル free group $f(B)$ カラ $\mathfrak{N}$ ノ automorphism 全体ノ作ル group $A\mathfrak{N}$ ノ中ヘノ homomorph ナ mapping $b_i \to \beta_i$ ト R カラ生成サレル $f(B)$ ノ normal subgroup $\mathfrak{R}$ カラ $\mathfrak{N}$ ノ中ヘノ mapping $r \to A_r$ ガ次ノ條件ヲ満足スルトキ $\mathfrak{N}$ ノ $\mathfrak{L}$ ニ由ル extension ガ得ラレル。

i) $A_{r_1 r_2} = A_{r_1} A_{r_2}$

ii) $A_{b_i r b_i^{-1}} = A_r^{\beta_i}$

iii) $A^{r(\mathfrak{S})} = A_S A A_S^{-1}$

（コヽデ A ハ $\mathfrak{N}$ ノ任意ノ元，又 $\Gamma(\beta)$ ハ f ノ元 $\Upsilon(b)$ ニ対応スル $A_{\mathfrak{N}}$ ノ元）

且 コノトキ extension $\mathfrak{G}$ ハ $\mathfrak{N}$ ト $f(B)$ ノ自由積＝$b_i A b_i^{-1}, A^{-\beta_i}$

$\Gamma(b)\cdot A_\Upsilon^{-1}$ ナル relotion ヲ入レル事ニ由リ得ラレル。逆ニカクシテスベテノ

$\mathfrak{N}$ ノ $\mathfrak{L}$ ニ由ル extension ガ得ラレル。

[Lemma 1]（Zassenhaus：Lehrbuch der Gruppentheorie ヨリ）

$\mathfrak{L}=(b_1)\times(b_2)\times\cdots\cdots\times(b_n)$，$b_i$ ノ order $=t_i$ ナル Abelian group $\mathfrak{L}$ ニ対シ $b_i\to\beta_i\in A_{\mathfrak{N}}$ ナル mapping ト $\mathfrak{N}$ ノ元 $A_i, A_{i,k}$ $(i,k=1,2,\cdots,n$；$i<k)$ ガ次ノ條件ヲ満足スレバ $\mathfrak{N}$ ノ $\mathfrak{L}$ ニ由ル extension ガ得ラレル。

(1) $t_i=0$ ナラバ $A_i=1$

(2) $A^{\beta_i t_i}=A^{A_i}$ $\qquad A_i^{\beta_i}=A_i$

(3) $A^{\beta_i\beta_k}=A^{A_{i,k}\beta_k\beta_i}$

(4) $A_{i,k}\ A_{k,i}=1$

(5) $A_k^{\beta_i}=A_{i,k}$ $\qquad A_{\beta_i}^{k}$ $(t_k>0$ 且 $i<k$ ナルトキ$)$

(6) $A_{i,k}^{\beta_l}\ A_{k,l}^{-1}\ A_{l,i}^{\beta_k}\ A_{i,k}^{-1}\ A_{k,l}^{\beta_i}\ A_{l,i}^{-1}=1$ $\qquad (i<k<l)$

且コノトキ extension $\mathfrak{G}$ ハ $\mathfrak{N}$ ト $f(B)$ ノ自由積＝$b_i A b_i^{-1} A^{-\beta_i}$，$b_i b_k b_i^{-1} b_k^{-1} A_{i,k}^{-1}$，$b_i^{t_i} A_i^{-1}$ ナル relation ヲ入レル事ニ由リ得ラレル。逆ニカクシテスベテノ $\mathfrak{N}$ ノ $\mathfrak{L}$ ニ由ル extension ガ得ラレル。

特ニ $\mathfrak{N}$ ガ Abelian group デ $\mathfrak{N}$ ヲ center ノ中ニ含ム様ナトキハ正田先生ノ theorem ニ於テ β_i ハスベテ identical ナ automorohism ニナラナケレバナラヌ。従ッテ f ト R ノ commutator subgroup ヲ $f_0 R$ デ表ハセバ R/f_0R カラ $\mathfrak{N}$ ノ中ヘノ homomorph ナ mapping ニ由リ $\mathfrak{N}$ ノ $\mathfrak{L}$ ニ由ル extension ハスベテ得ラレル。

今 $\mathfrak{L}$ ヲ有限 Abel 群トスル。

即チ $\mathfrak{L}=(b_1)\times\cdots\cdots\times(b_n)$

b_i ノ order $=t_i$ トスル。

$\mathfrak{L}$ ノ generator ノ set トシテ $B=\{b_1, \cdots\cdots, b_n\}$ ヲトレバ.
defining relation ハ $r_i = b_i^{t_i}$, $r_{i,k} = b_i b_k b_i^{-1} b_k^{-1}$ デアル.
$f(B)$ デ $\{r_i, r_{i,k}\}$ カラ生成サレル normal subgroup ヲ $\mathfrak{R}$ トスレバ次ノ Lemma ガ成立スル.

[Lemma 1.2]

$\mathfrak{R}/f_0\mathfrak{R} \simeq \mathfrak{M}_0 = (\mathfrak{W}_1)\times\cdots\times(\mathfrak{W}_n)\times(\mathfrak{W}_{1,2})\times\cdots\times(\mathfrak{W}_{i,k})\times\cdots\times(\mathfrak{W}_{n-1,n})$

ココデ $i<k$ 且 $\mathfrak{W}_i$ ノ order $=0$

$\mathfrak{W}_{i,k}$ ノ order $= t_k$ トスル.

[Proof] $\bar{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R}/f_0\mathfrak{R}$ トスレバ $\bar{\mathfrak{R}}$ ハ $\bar{r}_i = r_i\mathfrak{R}'$ $(i=m+1, \cdots, n)$ ト $\bar{r}_{i,k} = r_{i,k}\mathfrak{R}'$ $(i<k)$ カラ生成サレル事ハ明カデアル.

$\mathfrak{R}$ ニ於テハ

$$r_k^{b_i} = b_i r_k b_i^{-1} = (b_i b_k b_i^{-1})^{t_k} = (r_{i,k} b_k)^{t_k}$$
$$= r_{i,k}(b_k r_{i,k} b_k^{-1})(b_k^2 r_{i,k} b_k^{-2})\cdots(b_k^{t_k-1} r_{i,k} b_k^{-(t_k-1)})$$
$$= r_{i,k}^{1+b_k+\cdots+b_k^{t_k-1}} r_k$$

故ニ $\bar{\mathfrak{R}}$ ニ於テハ $\bar{r}_k = \bar{r}_{i,k}^{t_k} \bar{r}_k$ 即チ $\bar{r}_{i,k}^{t_k} = 1$ ヲ得ル.

故ニ $\mathfrak{W}_i \to \bar{r}_i$, $\mathfrak{W}_{i,k} \to \bar{r}_{i,k}$ ナル mapping ハ $\mathfrak{M}_0$ ノ $\bar{\mathfrak{R}}$ ノ上ヘノ homomorph ナ mapping ヲ与ヘル.

逆ニ Lemma 1 ニ於テスベテノ β_i ヲ identital automorphism トシ 且 $A_i = \mathfrak{W}_i$ $(m<i)$ $A_{i,k} = \mathfrak{W}_{i,k}$ トスレバ $\mathfrak{M}_0$ ノ $\mathfrak{L}$ ニ由ル extension ガ得ラレル事ガ分ル.

且コノ extension $\mathfrak{G}$ ハ $\mathfrak{M}_0$ ト $f(B)$ ノ自由積ニ $b_i \mathfrak{W} b_i^{-1} \mathfrak{W}^{-1}$, $b_i b_k b_i^{-1} b_k^{-1} \mathfrak{W}_{i,k}^{-1}$, $b_i^{t_i} \mathfrak{W}_i^{-1}$ ナル relation ヲ入レタモノデアル. 故ニ $\bar{r}_i \to \mathfrak{W}_i$, $\bar{r}_{i,k} \to \mathfrak{W}_{i,k}$ ナル mapping ハ $\bar{\mathfrak{R}}$ カラ $\mathfrak{M}_0$ ノ上ヘノ homomorph ナ mapping ヲ与ヘル.

ヨッテコノ定理ヲ得ル. q.e.d.

[Fundamental theorem]

$\mathfrak{M}_i$ カラ $\mathfrak{N}$ ノ中ヘノ homomorph ナ mapping ハ $\mathfrak{N}$ ヲ center ノ中ニ含ム様ナ $\mathfrak{N}$ ノ $\mathfrak{L}$ ニ由ル extension ヲ与ヘル。且コノトキ $\overline{W_i} \to A_i$ $\overline{W_{ik}} \to A_{ik}$ ナル mapping ニ由リ決定サレル extension $\mathfrak{G}$ ハ $\mathfrak{N}$ ト $f(R)$ ノ直積ニ $b_i^{\alpha_i} A_i^{-1}$, $b_i b_k b_i^{-1} b_k^{-1} A_{ik}^{-1}$ ナル relation ヲ入レタモノデアル。
逆ニ任意ノ $\mathfrak{N}$ ノ $\mathfrak{L}$ ニ由ル central extension ハ上ノ様ニシテ得ラレル。

[Proof] 正田先生ノ定理及 Lemma 2 ニ由リ明カデアル。

[記号]

$\{A_i, A_{i,k}\}$ デ $A_{i,k}^{\alpha}=E$ ナル 條件ヲミタス $\mathfrak{N}$ ノ元ノ集合ヲ factor set トイフ。又 factor set ノスベテノ集合ヲ $F(\mathfrak{N}, \mathfrak{L})$ デ表ハス。更ニ factor set $\{A_i, A_{ik}\}$ ニ由リ決定サレル $\mathfrak{N}$ ノ $\mathfrak{L}$ ニ由ル central extension ヲ $\mathcal{E}\{\mathfrak{N}, \mathfrak{L}; A_i, A_{ik}\}$ デ表ハスコトニスル。

§2 Quotient groups and subgroups of an Abelian group

$\mathfrak{A}=(a_1)\times(a_2)\times\cdots\times(a_r)$ ヲ invariant ガ $(s_1, s_2, \cdots, s_r)$ デアル様ナ Abelian group トスル。

$$b_i=\prod_{j=1}^{r} a_j^{\beta_{ij}} \quad (i=1,\cdots,n)$$

ナル n 個ノ元カラ生成サレル $\mathfrak{A}$ ノ subgroup ヲ $\mathfrak{L}$ トスル。コノ paragraph ニ於テハ $\mathfrak{L}$ 及 $\mathfrak{A}/\mathfrak{L}$ ノ invariant ヲ決定スル。

[Theorem 2.1]
$$B=\begin{pmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1r} \\ \beta_{n1} & \cdots & \beta_{nr} \end{pmatrix}, \quad N=\begin{pmatrix} s_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & s_r \end{pmatrix}$$
トスレバ $\mathfrak{A}/\mathfrak{L}$ ノ invariant ハ $B^*=\binom{B}{N}$ ノ elementar divisor ニ等シイ。

[Proof] B^* ハ明ニ $\mathfrak{A}/\mathfrak{L}$ ノ生成元 $\{\overline{a_1}, \cdots \overline{a_r}\}$ ニ対スル matrix of relations ナル事ヨリ明カデアル。

[Lemma 2.2] integral coefficient ヲモツ matrix Q ニ対シ unimodular ナ matrix U ヲ左カラ掛ケテ UQ ノ各列ハ 0 デナイ coefficient ガ高々一ツシカナイ様ニスルコトガ出来ル。

[Proof] $Q=\begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_r \end{pmatrix}$ (コヽデ q_i ハ Q ノ i 行ヲ表ハス) トスルトキ、
unimodular ナ matrix ヲ左カラ掛ケル等ニ由リ i 行ト k 行ヲトリカヘル事及ビ i 行ヲ $q_i+\lambda q_k$ (λ ハ任意ノ integer) ニオキカヘル事ガ出来ル。コノ二ツノ変形ヲ有限回繰返ス事ニ由リ Q ヲ求メル形ニ変形出来ル。

[Theorem 2.3] $B'=UB=(\beta'_{ij})$ ヲ Lemma 2.2 ノ條件ヲ充タス matrix トシ i 行デ 0 デナイ coefficient ガ $s_{i_\nu}, t_{i,\nu}$ $(\nu=1,\cdots,k)$ デアルトスル。今 B' ノ i 行ノ coefficient デ 0 デナイモノガ存在スルトキ $\dfrac{s_{i,\nu}}{\beta'_{i,t_{i,\nu}}}$ ノ least common multiple ヲ ℓ_i トシ、スベテ 0 ナル行ハ $\ell_i=1$ トスレバ
$\mathfrak{L}$ ノ invariant ハ $\begin{pmatrix} \ell_1 \ell_2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \ell_n \end{pmatrix}$ ノ elementare divisor ニ一致スル。

(Proof) $b_i=\prod_{\nu=1}^{r} a_\nu^{\beta'_{i\nu}}$ トスレバ仮定ニ由リ明ニ
$$\mathfrak{L}=(b'_1)\times(b'_2)\times\cdots\times(b'_n)$$
且コヽデ b'_i ノ order ハ ℓ_i ニ等シイ。ヨッテ Theorem ヲ得ル。

§3 Commutator group and center of an extension

$\mathfrak{L}=(b_1)\times\cdots\times(b_n)$ ガ invariant ヲ $(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ トシ
$\mathfrak{N}=(N_1)\times\cdots\times(N_m)$ ヲ invariant ガ $(s_1, s_2, \cdots, s_m)$ デアル様ナ Abel 群デアルトシ、$\mathfrak{G}=\mathcal{E}(\mathfrak{N}, \mathfrak{L}; A_i, A_{i,k})$ ノ commutator group 及ビ center ニツイテ考ヘル。

$A_{i,k_i} = N_1^{\alpha_{i,k}^{(1)}} N_2^{\alpha_{i,k}^{(2)}} \cdots N_m^{\alpha_{i,k}^{(m)}}$ トスル。$i=k$ デアル。

$k<i$ ナルトキ $\alpha_{i,k}^{(\nu)} = -\alpha_{k,i}^{(\nu)}$，$i=k$ ナルトキ $\alpha_{i,i}^{(\nu)}=0$ トシテ

$$A_\nu = \begin{pmatrix} \alpha_{11}^{(\nu)} & \alpha_{12}^{(\nu)} & \cdots & \alpha_{1,n}^{(\nu)} \\ \alpha_{21}^{(\nu)} & \alpha_{22}^{(\nu)} & \cdots & \alpha_{2,n}^{(\nu)} \\ \vdots & & & \\ \alpha_{n1}^{(\nu)} & \alpha_{n2}^{(\nu)} & \cdots & \alpha_{nn}^{(\nu)} \end{pmatrix}$$ トスル。

更ニ $\mathfrak{S}_i = s_i E_n = \left.\begin{pmatrix} s_i & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & s_i \end{pmatrix}\right] n$

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \mathfrak{S}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ A_2 & 0 & \mathfrak{S}_2 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ A_m & 0 & \cdots & 0 & \mathfrak{S}_m \end{pmatrix}$$ トスル。

[Theorem 3.1] $\mathfrak{G}$ ノ commutator group $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$ ハ $\{A_{ik}\}$ カラ生成サレル $\mathfrak{N}$ ノ subgroup デアル。ソシテ $\mathfrak{N}/\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$ 及 $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$ ノ invariant ハ正ニ [Theorem 2.1] 及 [Theorem 2.3] ニ由リ得ラレル。

[Proof] $\mathfrak{G}$ ハ $\mathfrak{N}$ ノ元ト $\mathfrak{S}$ ノ生空間 $\mathfrak{B}$ トデ生成サレ且 $\mathfrak{N}$ ハ $\mathfrak{G}$ ノ center ニ含マレル故 $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$ ハ $\mathfrak{B}$ ノ元ノ commutator $\{A_{i,k}\}$ カラ生成サレル $\mathfrak{N}$ ノ部分群デアル。

[Theorem 3.2]

$\mathfrak{G}/\mathfrak{N} \cong \mathfrak{S}$ ナル対応デ b_i ニ対応スル coset ノ代表元ヲ S_{b_i} デ表ハス事ニスル。$(x_1,\ldots,x_n, y_{11},\ldots,y_{i,k},\cdots y_{nn})$ ニ関スル連立方程式

(3.1) $\alpha_{i,1}^{(\nu)} x_1 + \alpha_{i,2}^{(\nu)} x_2 + \cdots + \alpha_{i,n}^{(\nu)} x_n + s_\nu y_{i\nu} = 0$

$\nu = 1,\ldots, m \quad ; \quad i = 1,\ldots, n$

ノ解ヲ $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n, \lambda_{11}, \ \ , \lambda_{ik},\ldots,\lambda_{nn})$ トスレバ，$Z=\prod_{i=1}^{n} S_{b_i}^{\lambda_i}$

従ッテ $Z\mathfrak{N}$ ハ $\mathfrak{G}$ ノ center $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ ニ含マレル。

逆ニ $Z=\prod_{i=1}^{n} S_{b_i}^{\lambda_i}$ ガ $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ ニ含マレレバ $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ ハ (3.1) ノ或解ノ部分ニナツテ居ル。

[Proof] $\mathfrak{K}(\mathfrak{G}) \subset \mathfrak{N} \subset \mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ ナル故 $\mathfrak{G}$ ノ任意ノ三元 S, S', S'' ニ対シ

$(S, S'S'') = (S, S')\cdot(S, S'')$ デアル。

(コヽデ $(S,S')=SS'S^{-1}S'^{-1}$ トル。)

又 $\mathfrak{N}\subset \mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ ナル故、$\mathfrak{G}$ ノ元 S ガ center ニ属スルタメノ条全條件ハ、任意ノ i ニ対シ $(S_{b_i}, S)=E$ ナル事デアル。

故ニ $S=\prod_{k=1}^{n} S_{b_k}^{\lambda_k}\in\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ ナルタメノ完全條件ハ 任意ノ i ニ対シ、

$$(S_{b_i},S)=\prod_{k=1}^{n}(S_{b_i},S_{b_k})^{\lambda_k}=\prod_{k=1}^{n}A_{i,k}^{\lambda_k}=\prod_{\nu,k}N_\nu^{\lambda_k d_{i,k}^{(\nu)}}=E$$

即チ $(\lambda_1,\cdots\cdots,\lambda_m)$ ガ

$$(3.2)\begin{cases} x_1 d_{i,1}^{(1)}+\cdots\cdots+x_n d_{i,n}^{(1)}\equiv 0 & (\mathrm{mod.}\ s_1)\\ x_1 d_{i,1}^{(2)}+\cdots\cdots+x_n d_{i,n}^{(2)}\equiv 0 & (\mathrm{mod.}\ s_2)\\ \vdots & \\ x_1 d_{i,1}^{(m)}+\cdots\cdots+x_n d_{i,n}^{(m)}\equiv 0 & (\mathrm{mod.}\ s_m)\end{cases}$$

ノ solution デアル事デアル。故ニ $(\lambda_1\cdots\cdots\lambda_n)$ ガ (3.1) ノ solution ノ一部分ニナル事デアル。

[lemma 3.3] $\mathbb{P}A\mathbb{Q}$ ガ diagonal form ニナル様ナ unimodular ナ matrix $\mathbb{P}, \mathbb{Q}$ ガ存在シ且 $\mathbb{Q}=(q_1,\cdots,q_{(m+1)n})$

$$\mathbb{P}A\mathbb{Q}=\begin{pmatrix} d_1 & & & & 0\\ & \ddots & & & \\ & & d_{r_0} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 0\end{pmatrix}$$

トスレバ (3.1) ノ solution ハ $(m+1)n-r$ 個ノ vector $q_{r+1},\cdots,q_{(m+1)n}$ ノ linear combination デ表ハセ、又ソノ逆モ成立スル。

[Proof] $\mathbb{P}A\mathbb{Q}$ ガ diagonal form ニナル様ナ $\mathbb{P}, \mathbb{Q}$ ガ存在スル事ハ明デアル。

今 $\quad \mathfrak{x}=\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\\ y_{11}\\ \vdots\\ y_{mn}\end{pmatrix}$ トスレバ

$$A\mathfrak{x}=0 \rightleftarrows \mathbb{P}A\mathbb{Q}\cdot\mathbb{Q}^{-1}\mathfrak{x}=0 \rightleftarrows \mathbb{Q}^{-1}\mathfrak{x}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ \lambda_{r+1}\\ \vdots\\ \lambda_{(m+1)n}\end{pmatrix}$$

今 e ヲ i 番目ガ 1 デ他ハスベテ 0 ナル $(m+1)n$ 次元ノ vector トスレバ

$$\mathfrak{x}=\lambda_{r+1}\mathbb{Q}e_{r+1}+\cdots\cdots+\lambda_{(m+1)n}\mathbb{Q}e_{(m+1)n}$$
$$=\lambda_{r+1}q_{r+1}+\cdots\cdots+\lambda_{(m+1)n}q_{(m+1)n}$$

故ニ Lemma ガ成立スル。

[Theorem 3.2] ト [Theorem 3.3] ニ由リ直チニ次ノ定理ヲ得ル。

[Theorem 3.4]

[Lemma 3.3] ニ於ケル q_i ヲ $\begin{pmatrix} q_{1i} \\ \vdots \\ q_{ni} \end{pmatrix}$ トスレバ、

$\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ ハ $\prod_{k=1} S_{b_k}^{q_{ki}}$ $i = r+1, \cdots, (m+1)n$ ト $\mathfrak{N}$ ノ元カラ生成サレル。

従ッテ $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$, $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})/\mathfrak{N}$ ノ invariant ハ夫々 [Theorem 2.1] 及 [Theorem 2.3] ニ由リ得ラレル。

§4. Group of extensions

前ト同様ニ $\mathfrak{L} = (b_1) \times \cdots \times (b_n)$, invariant ヲ $(t_1 \cdots\cdots t_n)$ トシ $\mathfrak{N} = (N_1) \times \cdots \times (N_m)$ ヲ invariant ガ $(s_1, \cdots, s_m)$ デアル様ナ Abel 群トスル。

[Definition] $\mathfrak{G} = \mathcal{E}(\mathfrak{N}, \mathfrak{L}; A_i, A_{i,k})$ ト $\mathfrak{G}' = \mathcal{E}(\mathfrak{N}, \mathfrak{L}; B_i, B_{i,k})$ ガ $\mathfrak{N}$ ノ元ハソレ自身ガ対応シ、又 $\mathfrak{L}$ ノ元 b ニ対応スル $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ ノ class ニハヤハリ b ニ対応スル $\mathfrak{G}'/\mathfrak{N}$ ノ class ガ対応スル様ナ同型対応ガ存在スルトキ $\mathfrak{G}$ ト $\mathfrak{G}'$ ハ同ジ type ノ extension デアルト定義スル。

[Theorem 4.1]

$\mathfrak{G} = \mathcal{E}(\mathfrak{N}, \mathfrak{L}; A_i, A_{i,k})$ ト $\mathfrak{G}' = \mathcal{E}(\mathfrak{N}, \mathfrak{L}; B_i, B_{i,k})$ ガ同ジ type ノ extension デアルタメノ必要且十分ナ條件ハ各 b_i ニ対応シテ $\mathfrak{N}$ ノ元 N_{b_i} ガ存在シテ

i) $B_i = A_i N_{b_i}^{t_i}$

ii) $B_{i,k} = A_{i,k}$

ナル條件ヲミタス事デアル。

[Proof]

$\mathfrak{G}$ ト $\mathfrak{G}'$ ガ同ジ type ノ extension デアルトシ、ソノ同型対応ヲ λ トスル。仮定ヨリ $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ ノ $\{b_i\}$ $(i=1, \cdots, n)$ ニ対応スル class ノ代表系 $\{S_i\}$ デ $S_i^{t_i} = A_i$, $S_i S_k S_i^{-1} S_k^{-1} = A_{i,k}$ トナルモノガトレル。

同様ニ $\mathfrak{G}'/\mathfrak{N}$ ノ代表系 $\{T_i\}$ デ

$T_i^{t_i} = B_i,\ T_i T_k T_i^{-1} T_k^{-1} = B_{i,k}$ ナルモノガトレル。

今 $\lambda(T_i) = S_i N_{b_i}$ トスレバ

$$B_i = \lambda(B_i) = \lambda(T_i^{t_i}) = (\lambda(T_i))^{t_i} = (S_i N_{b_i})^{t_i} = A_i N_{b_i}^{t_i}$$

又 $B_{i,k} = \alpha(B_{i,k}) = \lambda(T_i T_k T_i^{-1} T_k^{-1})$

$$= S_i N_{b_i} S_k N_{b_k} (S_i N_{b_i})^{-1} (S_k N_{b_k})^{-1} = S_i S_k S_i^{-1} S_k^{-1} = A_{i,k}$$

故ニ定理ノ條件ガ必要ナル事ガイヘタ。

逆ニ定理ノ條件ガミタサレテ居レバ，$\mathfrak{N}$ ノ元 N ニ対シテハ $\lambda(N) = N$ トシ 又 i ニ対シテハ $\lambda(T_i) = S_i N_{b_i}$ トシテ $\mathfrak{G}'$ カラ $\mathfrak{G}$ ノ上ヘノ対応 λ ヲ定理スレバ コレガ同型対応ヲ与ヘ 従ツテ $\mathfrak{G}$ ト $\mathfrak{G}'$ ガ同ジ type ノ extension ナル事ガ分ル。

[Definition] 二ツノ factor set $\{A_i, A_{i,k}\}$ ト $\{B_i, B_{i,k}\}$ ガ [Theorem 4.1] ノ條件ヲミタストキ equivalent デアルトイフ. 且コノトキ $\{A_i, A_{i,k}\} \sim \{B_i, B_{i,k}\}$ トカク。

コレガ同値律ヲ充タス事ハ殆ンド明デアル。

[Lemma 4.2]

$\{A_i, A_{i,k}\} \circ \{B_i, B_{i,k}\} = \{A_i B_i,\ A_{i,k} B_{i,k}\}$ ニ由リ二ツノ factor set ノ間ノ積ヲ定義スレバ factor set ノ全体 $F(\mathfrak{N}, \mathfrak{L})$ ハ group ヲ作ル。

且 $F(\mathfrak{N}, \mathfrak{L}) \simeq \mathfrak{N}_1 \times \cdots \times \mathfrak{N}_n \times \mathfrak{N}_{1,2} \times \cdots \times \mathfrak{N}_{i,k} \times \cdots \times \mathfrak{N}_{n-1,n}$

コヽデ $i<k$，$\mathfrak{N} \simeq \mathfrak{N}_i$，$\mathfrak{N}_{i,k} \simeq \mathfrak{N}^{(t_k)} = \{N \mid N \in \mathfrak{N},\ N^{t_k} = E\}$ トスル。

[Proof] $A_{i,k}^{t_k} = E$. $B_{i,k}^{t_k} = E$ ナラバ $(A_{i,k}^{-1})^{t_k} = E$, $(A_{i,k} B_{i,k})^{t_k} = E$ ナル故 $F(\mathfrak{N}, \mathfrak{L})$ ガ group ヲ作ル事ハ明デアル. 且 factor set $\{A_i, A_{i,k}\}$ ハ A_i ハ $\mathfrak{N}$ カラ, $A_{i,k}$ ハ $\mathfrak{N}^{(t_k)}$ カラ任意ノ元ヲトル事ニ由リ得ラレル故. 後半モ明デアル。

[Definition]

$\{A_i, A_{i,k}\} \sim \{A_i', A_{i,k}'\}$. $\{B_i, B_{i,k}\} \sim \{B_i', B_{i,k}'\}$ ナラバ $\{A_i B_i,$

$A_{i,k} B_{i,k}\} \sim \{A_i'-B_i', A_{i,k}' B_{i,k}'\}$ナル故 $F(\mathfrak{N},\mathfrak{L})$ヲ equivalentナ classニ分テレバ．ソレハ又 abelian groupヲ作ル．ソレヲ $\mathfrak{N}$ノ $\mathfrak{L}$ニ由ル extention ノ group トイヒ，$\mathcal{E}(\mathfrak{N},\mathfrak{L})$デ表ハス。

equivalent ノ定義ヨリ直ニ $\mathcal{E}(\mathfrak{N},\mathfrak{L})$ハ決定サレル．部分

[Theorem 4.3]

$$\mathcal{E}(\mathfrak{N},\mathfrak{L}) \simeq \mathfrak{N}_1/\mathfrak{N}_1^{t_1} \times \cdots \times \mathfrak{N}_n/\mathfrak{N}_n^{t_n} \times \mathfrak{N}_{12} \times \cdots \times \mathfrak{N}_{n-1,n}$$

[Theorem 4.4]

$\mathcal{E}(\mathfrak{N},\mathfrak{L})$ノ order ハ $\prod_{i=1}^{m}\prod_{k=1}^{n}(s_i, t_k)^k$デアル。

コヽデ (s_i, t_k)ハ s_iト t_kノ greatest common divisor デアル。

[Proof.] $\mathfrak{N}^{t_k} = (N_1^{t_k}) \times \cdots \times (N_m^{t_k})$

$\therefore \mathfrak{N}/\mathfrak{N}^{t_k} = (N_1)/(N_1^{t_k}) \times \cdots \times (N_m)/(N_m^{t_k})$

コヽデ $N_i/(N_i^{t_k})$ノ order ハ (s_i, t_k) 故ニ $\mathfrak{N}/\mathfrak{N}^{t_k}$ノ order ハ $\prod_{i=1}^{m}(s_i, t_k)$デアル。

又 $\mathfrak{N}^{(t_k)} = (N_1^{(t_k)}) \times \cdots \times (N_m)^{(t_k)}$ デ $(N_i)^{(t_k)}$ノ order ハ (s_i, t_k) 故ニ $\mathfrak{N}^{(t_k)}$ノ order ハ $\prod_{i=1}^{m}(s_i, t_k)$

故ニ上ノ定理ヲ得ル． q.e.d