OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Group ノ central extension ニ就テ
Author(s)	永尾, 汎
Citation	全国紙上数学談話会. 1948, 2(7), p. 195-203
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75203
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

68 Group ノ central extension ニ就テ

1947.9.9 (阪大) 永尾 汎

$\mathfrak{G}$ ガ normal-subgroup $\mathfrak{H}$ ヲ含ミ, 且 $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}\sim\mathfrak{L}$ ナルトキ $\mathfrak{G}$ ハ $\mathfrak{H}$ ト $\mathfrak{L}$ ニ由ル extension デアルトイヒマス. 先ヅ $\mathfrak{H}$ ト $\mathfrak{L}$ ヲ与ヘテ $\mathfrak{H}$ ノ $\mathfrak{L}$ ニ由ル extension ヲスベテ求メル事ガ的確 group ノ extension ノ問題デ コノ問題ニ関シテハ最初 O. Schreier ガ條件ヲ出シ 後正田先生ガ別ノ立場カラコノ條件ヲ出サレマシタ。コヽデハ $\mathfrak{H}$ モ $\mathfrak{L}$ モ共ニ有限 Abel 群トシ, $\mathfrak{H}$ ヲ center ニ含ム様ナ $\mathfrak{H}$ ノ $\mathfrak{L}$ ニ由ル extension ヲ "central extension" ト呼ブコトニシテ先ヅ正田先生ノ條件ニ由リスベテノ central extension ヲ求メマス (§1) ソシテ更ニソノ central extension ノ commutator subgroup 及 center ヲ決定シ (§3) 又 extension ノ type ヲ定義シテソノ作ル群ヲ決定シタイト思ヒマス。(§4). 最後ニ懇々御指導ヲ受ケマシタ正田先生ニ対シ感謝イタシマス。

§1. Fundamental t sorem

先ヅ正田先生ノ定理及 Lassenhaus ノ Lehrbuch der Gruppen theorie ニアル定理ヲ証明ナシニアゲマス。

〔正田ノ theorem〕

$\mathfrak{L}$ ガ generator ノ set $B=\{b_\tau\}$ ト defining relation ノ set $R=\{r\}$ ニ由リ与ヘラレテヰルトスル。

尚ノ任意ノ group $\mathfrak{A}$ ニ対シ、Bカラ生成サレル free group $f(B)$ カラ $\mathfrak{A}$ ノ automorphism 全体ノ作リ group $A\mathfrak{A}$ ノ中ヘノ homomorph ナ mapping $b_i\to\beta_i$ トRカラ生成サレル $f(B)$ ノ normal subgroup $\mathfrak{R}$ カラ $\mathfrak{A}$ ノ中ヘノ mapping $r\to A_r$ ガ次ノ條件ヲ満足スルトキ $\mathfrak{A}$ ノ $\mathfrak{L}$ ニ由ル extension ガ得ラレル。

i) $A_{r_1r_2}=A_{r_1}A_{r_2}$

ii) $A_{bir b_i^{-1}}=A_r^{\beta_i}$

iii) $A_{r(\beta_i)}=A_\sigma A A_\tau^{-1}$

(コヽデ A ハ $\mathfrak{N}$ ノ任意ノ元，又 $\Gamma(\beta)$ ハ f ノ元 $T(b)$ ニ対応スル $A_{\mathfrak{N}}$ ノ元)
且コノトキ extension $\mathfrak{G}$ ハ $\mathfrak{N}$ ト $f(\mathfrak{B})$ ノ自由積 $= b_i A b_i^{-1}, A^{-\beta_i} T(b) \cdot A_T^{-1}$ ナル relotion ヲ入レル事ニ由リ得ラレル。逆ニカクシテ スベテノ $\mathfrak{N}$ ト $\mathfrak{L}$ ニ由ル extension ガ得ラレル。

[Lemmal 1] (Zassénhuus : Lehrbuch der Gruppen-theorie ヨリ)
$\mathfrak{L} = (b_1) \times (b_2) \times \cdots \times (b_n)$, b_i ノ order $= t_i$ ナル Abelian group $\mathfrak{L}$ ニ対シ $b_i \to \beta_i \in A_{\mathfrak{N}}$ ナル mapping ト $\mathfrak{N}$ ノ元 $A_i, A_{i,R}$ ($i.k = 1.2, \cdots, n$; $i \neq k$) ガ次ノ條件ヲ満足スレバ $\mathfrak{N}$ ト $\mathfrak{L}$ ニ由ル extension ガ得ラレル。

(1) $t_i = 0$ ナラバ $A_i = 1$
(2) $A^{\beta_i t_i} = A^{A_i}$ $\qquad A_i^{\beta_i} = A_i$
(3) $A^{\beta_i \beta_R} = A^{A_{i,R} \beta_R \beta_i}$
(4) $A_{i,R}\ A_{R,i} = 1$
(5) $A_R^{\beta_i} = A_{i,R}$ $\qquad A_R$ ($t_R > 0$ 且ツ $i \neq k$ ナルトキ)
(6) $A_{i,R}^{\beta_e}\ A_{R,e}^{-1}\ A_{e,i}^{\beta_R}\ A_{i,R}^{-1}\ A_{R,e}^{\beta_i}\ A_{e,i}^{-1} = 1$ $\qquad (i < k < e)$

且コノトキ extension $\mathfrak{G}$ ハ $\mathfrak{N}$ ト $f(\mathfrak{B})$ ノ自由積 $= b_i A b_i^{-1} A^{-\beta_i}$, $b_i b_R b_i^{-1} b_R^{-1} A_{i,R}^{-1}$, $b_i^{t_i} A_i^{-1}$ ナル relation ヲ入レル事ニ由リ得ラレル。逆ニカクシテスベテノ $\mathfrak{N}$ ト $\mathfrak{L}$ ニ由ル extension ガ得ラレル。

特ニ $\mathfrak{N}$ ガ Abelian group デ $\mathfrak{N}$ ヲ center ノ中ニ含ム様ナトキハ正田先生ノ theorem ニ於テ β_i ハスベテ identical ナ automorphism ニナラナケレバナラヌ。従ッテ f ト $\mathfrak{R}$ ノ commutator subgroup ヲ f_0 ヲ以テ表ハセバ $\mathfrak{R}/f_0\mathfrak{R}$ カラ $\mathfrak{N}$ ノ中ヘノ homomorphナ mapping ニ由リ $\mathfrak{N}$ ト $\mathfrak{L}$ ニ由ル extension ハスベテ得ラレル。
今 $\mathfrak{L}$ ヲ有限 Abel 群トスル。
即チ $\mathfrak{L} = (b_1) \times \cdots \times (b_n)$
b_i ノ order $= t_i$ トスル。

$\mathfrak{L}$ ノ generator ノ set トシテ $B=\{b_1,\cdots\cdots,b_n\}$ ヲトレバ.
defining relation ハ $r_i=b_i^{t_i}$, $r_{i,R}=b_i b_R b_i^{-1} b_R^{-1}$ デアル。
$f(B)$ デ $\{r_i, r_{i,R}\}$ カラ生成サレル normal subgroup ヲ $\mathfrak{R}$ トスレバ次ノ Lemma ガ成立スル。

[Lemma 1.2]

$\mathfrak{R}/\mathfrak{foR} \simeq \mathfrak{M}=(W_1)\times\cdots\times(W_n)\times(W_{1,2})\times\cdots\times(W_{i,R})\times\cdots\times(W_{n-1,n})$

ココデ $i<k$ 且 W_i ノ order $=0$

$W_{i,R}$ ノ order $=t_R$ トスル。

[Proof] $\overline{\mathfrak{R}}=\mathfrak{R}/\mathfrak{foR}$ トスレバ $\overline{\mathfrak{R}}$ ハ $\overline{r_i}=r_i\mathfrak{R}'$ $(i=m+1,\cdots,n)$ ト $\overline{r_{i,R}}=r_{i,R}\mathfrak{R}'$ $(i<k)$ カラ生成サレル事ハ明カデアル。

$\mathfrak{R}$ ニ於テハ.

$$r_R^{b_i}=b_i r_R b_i^{-1}=(b_i b_R b_i^{-1})^{t_R}=(r_{i,R} b_R)^{t_R}$$
$$=r_{i,R}(b_R r_{i,R} b_R^{-1})(b_R^2 r_{i,R} b_R^{-2})\cdots(b_R^{t_R-1} r_{i,R} b_R^{-(t_R-1)})$$
$$=r_{i,R}^{1+b_R+\cdots+b_R^{t_R-1}} r_R$$

故ニ $\overline{\mathfrak{R}}$ ニ於テハ $\overline{r}_R=\overline{r}_{i,R}^{\,t_R}\,\overline{r}_R$ 即チ $\overline{r}_{i,R}^{\,t_R}=1$ ヲ得ル。

故ニ $W_i\to\overline{r}_i$, $W_{i,R}\to\overline{r}_{i,R}$ ナル mapping ハ $\mathfrak{M}$ ノ $\overline{\mathfrak{R}}$ ノ上ヘノ homomorph ナ mapping ヲ与ヘル。

逆ニ Lemma 1 ニ於テスベテノ β_i ヲ identical automorphism トシ且 $A_i=W_i$ $(m<i)$ $A_{i,R}=W_{i,R}$ トスレバ $\mathfrak{M}$ ノ $\mathfrak{L}$ ニ由ル extension ガ得ラレル事ガ分ル。

且コノ extension $\mathfrak{Of}$ ハ $\mathfrak{M}$ ト $f(B)$ ノ自由積ニ $b_i W b_i^{-1} W^{-1}$, $b_i b_R b_i^{-1} b_R^{-1} W_{i,R}^{-1}$, $b_i^{t_i} W_i^{-1}$ ナル relation ヲ入レタモノデアル。故ニ $\overline{r}_i\to W_i$, $\overline{r}_{i,R}\to W_{i,R}$ ナル mapping ハ $\overline{\mathfrak{R}}$ カラ $\mathfrak{M}$ ノ上ヘノ homomorph ナ mapping ヲ与ヘル。

ヨッテコノ定理ヲ得ル。 q. e. d.

[Fundamental theorem]

$\mathfrak{M}$カラ$\mathfrak{N}$ノ中ヘノ homomorph ナ mapping ハ$\mathfrak{N}$ヲ center ノ中ニ含ム様ナ$\mathfrak{N}$ノ$\mathfrak{L}$ニ由ル extension ヲ与ヘル。且コノトキ $\overline{m}_i \to A_i$ $\overline{m}_i \to A_i R$ ナル mapping ニ由リ決定サレル extension $\mathcal{G}$ ハ$\mathfrak{N}$ト $f(\mathfrak{L})$ ノ直積ニ $b_i^{\alpha_i} A_i^{-1}$, $b_i b_k b_i^{-1} A_i^{-}R'$ ナル relation ヲ入レタモノデアル。

逆ニ任意ノ$\mathfrak{N}$ノ$\mathfrak{L}$ニ由ル central extension ハ上ノ様ニシテ得ラレル。

[Proof] 正田先生ノ定理及 Lemma 2 ニ由リ明カデアル。

[定義ト記号]

$\{A_i, A_{i,R}\}$ デ $A_{i,R}^{\alpha} = E$ ナル條件ヲミタス$\mathfrak{N}$ノ元ノ集合ヲ factor set トイフ。又 factor set ノスベテノ集合ヲ $F(\mathfrak{N}, \mathfrak{L})$ デ表ハス。更ニ factor set $\{A_i, A_{iR}\}$ ニ由リ決定サレル$\mathfrak{N}$ノ$\mathfrak{L}$ニ由ル central extension ヲ $\mathcal{E}\{\mathfrak{N}, \mathfrak{L}; A_i, A_{iR}\}$ デ表ハスコトニスル。

§2 Quotient groups and subgroups of an Abelian group

$\mathfrak{A} = (a_1) \times (a_2) \times \cdots \times (a_r)$ ヲ invariant ガ $(s_1, s_2, \ldots, s_r)$ デアル様ナ Abelian group トスル。

$$b_i = \prod_{j=1}^{r} a_j^{\beta_{ij}} \quad (i = 1, \cdots, n)$$

ナル n 個ノ元カラ生成サレル $\mathfrak{A}$ ノ subgroup ヲ $\mathfrak{B}$ トスル。コノ paragraph ニ於テハ $\mathfrak{B}$ 及 $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ ノ invariant ヲ決定スル。

[Theorem 2.1]

$$B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1r} \\ \beta_{n1} & \cdots & \beta_{nr} \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} s_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & s_r \end{pmatrix}$$

トスレバ $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ ノ invariant ハ $B^* = \begin{pmatrix} B \\ N \end{pmatrix}$ ノ elementary divisor ニ等シイ。

[Proof] B^* ハ明ニ $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ ノ生成元 $\{\overline{a}_1, \cdots \overline{a}_r\}$ ニ対スル matrix of relations ナル事ヨリ明カデアル。

[Lemma 2.2] integral coefficient ヲモツ matrix Q ニ対シ unimodular ナ matrix U ヲ左カラ掛ケテ UQ ノ各列ノ 0 デナイ coefficient ガ高々一ツシカナイ様ニスルコトガ出来ル。

[Proof] $Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_r \end{pmatrix}$ (コヽデ q_i ハ Q ノ i-行ヲ表ハス) トスルトキ

unimodular ナ matrix ヲ左カラ掛ケル事ニ由リ i 行ト k 行ヲトリカヘル事及ビ i 行ヲ $q_i + \lambda q_k$ (λ ハ任意ノ integer) ニオキカヘル事ガ出来ル。コノ二ツノ変形ヲ有限回繰返ス事ニ由リ Q ヲ求メル形ニ変形出来ル。

[Theorem 2.3] $B' = UB = (\beta'_{ij})$ ヲ Lemma 2.2 ノ條件ヲ充タス matrix トシ、i-行テ 0 デナイ coefficient ガ $s_{i_\nu} t_{i,\nu}$ $(\nu = 1, \cdots, k)$ デアルトスル。今 B' ノ i-行ノ coefficient デ 0 デナイモノガ存在スルトキ $\dfrac{s_{i,\nu}}{g_{i,\nu} t_{i,\nu}}$ ノ least common multiple ヲ l_i トシ、スベテ 0 ナルトキハ $l_i = 1$ トスレバ

$\mathfrak{B}$ ノ invariant ハ $\begin{pmatrix} l_1 l_2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & l_n \end{pmatrix}$ ノ elementary divisor ニ一致スル。

(Proof) $b'_i = \prod_{\nu=1}^{r} a_\nu^{\beta'_{i\nu}}$ トスレバ仮定ニ由リ明ニ

$$\mathfrak{B} = (b'_1) \times (b'_2) \times \cdots\cdots \times (b'_n)$$

且コヽデ b'_i ノ order ハ l_i ニ等シイ。ヨッテ Theorem ヲ得ル。

§3 Commutator group and center of an extension

$\mathfrak{L} = (b_1) \times \cdots \times (b_n)$ ノ invariant ヲ $(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ トシ

$\mathfrak{N} = (N_1) \times \cdots \times (N_m)$ ノ invariant ガ $(s_1, s_2, \cdots, s_m)$ デアル様ナ Abel 群デアルトシ、$\mathfrak{G} = \mathcal{E}(\mathfrak{N}, \mathfrak{L}; A_i, A_{i,R})$ ノ commutator group 及ビ center ニツイテ考ヘル。

$$A_{i,k_1}=N_1^{\alpha_{i,k}^{(1)}}\ N_2^{\alpha_{i,k}^{(2)}}\cdots\cdots N_m^{\alpha_{i,k}^{(m)}}$$ トスル。$i=k$デアル。

$\nu<i$ ナルトキ $\alpha_{i,k}^{(\nu)}=-\alpha_{k,i}^{(\nu)}$，$i=k$ナルトキ $\alpha_{i,i}^{(\nu)}=0$トシテ

$$A_\nu=\begin{pmatrix}\alpha_{11}^{(\nu)} & \alpha_{12}^{(\nu)} & \cdots\cdots & \alpha_{1,n}^{(\nu)}\\ \alpha_{21}^{(\nu)} & \alpha_{22}^{(\nu)} & \cdots\cdots & \alpha_{2,n}^{(\nu)}\\ \vdots & & & \\ \alpha_{n1}^{(\nu)} & \alpha_{n2}^{(\nu)} & \cdots\cdots & \alpha_{nn}^{(\nu)}\end{pmatrix}$$ トスル。

更ニ $S_i=s_i E_n=\begin{pmatrix}s_i & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & s_i\end{pmatrix}\Big]n$

$$A=\begin{pmatrix}A_1 & S_1 & 0 & \cdots & 0\\ A_2 & 0 & S_2 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ A_m & 0 & \cdots\cdots & 0 & S_m\end{pmatrix}$$ トスル。

[Theorem 3.1] $\mathfrak{G}$ ノ commutator group $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$ ハ $\{A_{i,k}\}$ カラ生成サレル $\mathfrak{N}$ ノ subgroup デアル。ソシテ $\mathfrak{N}/\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$ 及 $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$ ノ invariant ハ夫々 [Theorem 2.1] 及 [Theorem 2.3] ニ由リ得ラレル。

[Proof] $\mathfrak{G}$ ハ $\mathfrak{N}$ ノ元ト $\mathfrak{B}$ ノ生空間 B トデ生成サレ且 $\mathfrak{N}$ ハ $\mathfrak{G}$ ノ center ニ含マレル故 $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$ ハ B ノ元ノ commutator $\{A_{i,k}\}$ カラ生成サレル $\mathfrak{N}$ ノ部分群デアル。

[Theorem 3.2]

$\mathfrak{G}/\mathfrak{N}\simeq\mathfrak{B}$ ナル対応デ b_i ニ対応スル coset ノ代表元ヲ S_{b_i} デ表ハス事ニスル。$(x_1,\cdots,x_n,y_{11},\cdots,y_{i,k},\cdots y_{nn})$ ニ関スル聯立方程式

(3.1) $\alpha_{i,1}^{(\nu)}x_1+\alpha_{i,2}^{(\nu)}x_2+\cdots\cdots+\alpha_{i,n}^{(\nu)}x_n+s_i y_{i\nu}=0$

$\nu=1,\cdots\cdots,m\quad;\quad i=1,\cdots\cdots,n$

ノ解ヲ $(\lambda_1,\cdots,\lambda_n,\lambda_{11},\ \ ,\lambda_{ik},\cdots,\lambda_{nn})$ トスレバ，$z=\prod_{i=1}^{n}S_{b_i}^{\lambda_i}$

従ッテ $z\mathfrak{N}$ ハ $\mathfrak{G}$ ノ center $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ ニ含マレル。

逆ニ $z=\prod_{i=1}^{n}S_{b_i}^{\lambda_i}$ ガ $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ ニ含マレレバ $(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ ハ (3.1) ノ或解ノ部分ニナッテ居ル。

[Proof] $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})\subset\mathfrak{N}\subset\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ ナル故 $\mathfrak{G}$ ノ任意ノ三元 S,S',S'' ニ対シ $(S,S'S'')=(S,S')\cdot(S,S'')$ デアル。

(コヽデ $(S,S')=SS'S^{-1}S'^{-1}$ トル。)

又 $\mathfrak{n}\subset\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ ナル故、$\mathfrak{g}$ ノ元 S ガ center ニ属スルタメノ完全條件ハ、任意ノ i ニ対シ $(S_{b_i}, S)=E$ ナル事デアル。

故ニ $S=\prod_{k=1}^{n} S_{b_k}^{\lambda_k}\in\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ ナルタメノ完全條件ハ任意ノ i ニ対シ、

$$(S_{b_i},S)=\prod_{k=1}^{n}(S_{b_i},S_{b_k})^{\lambda_k}=\prod_{k=1}^{n}A_{i,k}^{\lambda_k}=\prod_{\nu,k}N_\nu^{\lambda_k d_{i,k}^{(\nu)}}=E$$

即チ $(\lambda_1,\cdots\cdots,\lambda_m)$ ガ

$$(3.2)\begin{cases} x_1 d_{i,1}^{(1)}+\cdots\cdots+x_n d_{i,n}^{(1)}\equiv 0 & (\mathrm{mod.}\ s_1)\\ x_1 d_{i,1}^{(2)}+\cdots\cdots+x_n d_{i,n}^{(2)}\equiv 0 & (\mathrm{mod.}\ s_2)\\ \vdots & \\ x_1 d_{i,1}^{(m)}+\cdots\cdots+x_n d_{i,n}^{(m)}\equiv 0 & (\mathrm{mod.}\ s_m)\end{cases}$$

ノ solution デアル事デアル。故ニ $(\lambda_1\cdots\cdots\lambda_n)$ ガ (3.1) ノ solution ノ一部分ニナル事デアル。

[Lemma 3.3] $\mathbb{P}\mathbb{A}\mathbb{Q}$ ガ diagonal form ニナル様ナ unimodular ナ matrix $\mathbb{P}$, $\mathbb{Q}$ ガ存在シ且 $\mathbb{Q}=(\mathfrak{q}_1,\cdots,\mathfrak{q}_{(m+1)n})$

$$\mathbb{P}\mathbb{A}\mathbb{Q}=\begin{pmatrix} d_1 & & & & 0\\ & \ddots & & & \\ & & d_{r_0} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 0\end{pmatrix}$$

トスレバ (3.1) ノ solution ハ $(m+1)n-r$ 個ノ vector $\mathfrak{q}_{r+1},\cdots,\mathfrak{q}_{(m+1)n}$ ノ linear combination デ表ハセ、又ソノ逆モ成立スル。

[Proof] $\mathbb{P}\mathbb{A}\mathbb{Q}$ ガ diagonal form ニナル様ナ $\mathbb{P}$, $\mathbb{Q}$ ガ存在スル事ハ明デアル。

今 $\mathfrak{x}=\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\\ y_{11}\\ \vdots\\ y_{m1}\end{pmatrix}$ トスレバ

$$\mathbb{A}\mathfrak{x}=0 \rightleftarrows \mathbb{P}\mathbb{A}\mathbb{Q}\cdot\mathbb{Q}^{-1}\mathfrak{x}=0 \rightleftarrows \mathbb{Q}^{-1}\mathfrak{x}=\begin{pmatrix} 0\\ \vdots\\ 0\\ \lambda_{r+1}\\ \vdots\\ \lambda_{(m+1)n}\end{pmatrix}$$

今 $\mathfrak{e}$ ヲ i 番目ガ 1 デ他ハスベテ 0 ナル $(m+1)n$ 次元ノ vector トスレバ

$$\mathfrak{x}=\lambda_{r+1}\mathbb{Q}\mathfrak{e}_{r+1}+\cdots\cdots+\lambda_{(m+1)n}\mathbb{Q}\mathfrak{e}_{(m+1)n}$$

$$=\lambda_{r+1}\mathfrak{q}_{r+1}+\cdots\cdots+\lambda_{(m+1)n}\mathfrak{q}_{(m+1)n}$$

故ニ Lemma ガ成立スル。

〔Theorem 3.2〕ト〔Theorem 3.3〕ニ由リ直チニ次ノ定理ヲ得ル。

〔Theorem 3.4〕

〔Lemma 3.3〕ニオケル q_iヲ $\begin{pmatrix} q_{1i} \\ \vdots \\ q_{ni} \end{pmatrix}$ トスレバ、

$\mathfrak{Z}(\mathfrak{A})$ ハ $\prod_{k=1}^{n} S_{b_k}^{q_{ki}}$ $i=r+1,\cdots,(m+1)n$ トノ元カラ生成サレル。

依ッテ $\mathfrak{A}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{A})$, $\mathfrak{Z}(\mathfrak{A})/\mathfrak{N}$ ノ invariant ハ夫々〔Theorem 2.1〕及〔Theorem 2.3〕ニ由リ得ラレル。

§4. Group of extensions

前ト同様ニ $\mathfrak{L}=(b_1)\times\cdots\times(b_n)$, invariantヲ $(t_1 \cdots t_n)$トシ $\mathfrak{N}=(N_1)\times\cdots\times(N_m)$ヲ invariantガ $(\Delta_1,\cdots,\Delta_m)$デアル様ナ Abel群トスル。

〔Definition〕 $\mathfrak{A}=\mathcal{E}(\mathfrak{N},\mathfrak{L};A_i,A_{i,R})$ト $\mathfrak{A}'=\mathcal{E}(\mathfrak{N},\mathfrak{L};B_i,B_{i,R})$ガ$\mathfrak{N}$ノ元ハソレ自身ガ対応シ、又$\mathfrak{L}$ノ元$b$ニ対応スル$\mathfrak{A}/\mathfrak{N}$ノ classニハヤハリ$b$ニ対応スル$\mathfrak{A}'/\mathfrak{N}$ノ classガ対応スル様ナ同型対応ガ存在スルトキ $\mathfrak{A}$ト$\mathfrak{A}'$ハ同ジ type ノ extension デアルト定義スル。

〔Theorem 4.1〕

$\mathfrak{A}=\mathcal{E}(\mathfrak{N},\mathfrak{L};A_i,A_{i,K})$ト$\mathfrak{A}'=\mathcal{E}(\mathfrak{N},\mathfrak{L};B_i,B_{i,K})$ガ同ジ type ノ extensionデアルタメノ必要且十分ナ條件ハ各 b_i ニ対応シテ$\mathfrak{N}$ノ元 N_{b_i}ガ存在シテ

i) $B_i=A_i N_{b_i}^{t_i}$

ii) $B_{i,R}=A_{i,R}$

ナル條件ヲミタス事デアル。

〔Proof〕

$\mathfrak{A}$ト$\mathfrak{A}'$ガ同ジtype ノ extension デアルトシ、ソノ同型対応ヲ入トスル。

仮定ヨリ $\mathfrak{A}/\mathfrak{N}$ ノ $\{b_i\}$ $(i=1,\cdots,n)$ニ対応スル class ノ代表系 $\{S_i\}$デ $S_i^{t_i}=A_i$, $S_iS_kS_i^{-1}S_k^{-1}=A_{i,k}$トナルモノガトレル。

同様ニ $\mathfrak{G}'/\mathfrak{N}$ ノ代表系 $\{T_i\}$ デ

$T_i^{t_i} = B_i$, $T_i T_k T_i^{-1} T_k^{-1} = B_{i,k}$ ナルモノガトレル。

今 $\lambda(T_i) = S_i N_{b_i}$ トスレバ

$$B_i = \lambda(B_i) = \lambda(T_i^{t_i}) = (\lambda(T_i))^{t_i} = (S_i N_{b_i})^{t_i} = A_i N_{b_i}^{t_i}$$

又 $B_{i,k} = \lambda(B_{i,k}) = \lambda(T_i T_k T_i^{-1} T_k^{-1})$

$$= S_i N_{b_i} S_k N_{b_k} (S_i N_{b_i})^{-1} (S_k N_{b_k})^{-1} = S_i S_k S_i^{-1} S_k^{-1} = A_{i,k}$$

故ニ定理ノ條件ガ必要ナル事ガイヘタ。

逆ニ定理ノ條件ガミタサレテヰレバ，$\mathfrak{N}$ ノ元 N ニ対シテハ $\lambda(N) = N$ トシ 又 $\mathfrak{N}$ ニ対シテハ $\lambda(T_i) = S_i N_{b_i}$ トシテ $\mathfrak{G}'$ カラ $\mathfrak{G}$ ノ上ヘノ対応 λ ヲ定理スレバ コレガ同型対応ヲ与ヘ 従ツテ $\mathfrak{G}$ ト $\mathfrak{G}'$ ガ同ジ type ノ extension ナル事ガ分ル。

[Definition] ニツノ factor set $\{A_i, A_{i,k}\}$ ト $\{B_i, B_{i,k}\}$ ガ [Theorem 4.1] ノ條件ヲミクストキ equivalent デアルトイフ. 且コノトキ $\{A_i, A_{i,k}\} \sim \{B_i, B_{i,k}\}$ トカク。

コレガ同値律ヲ充タス事ハ殆ンド明デアル。

[Lemma 4.2]

$\{A_i, A_{i,k}\} \circ \{B_i, B_{i,k}\} = \{A_i B_i, A_{i,k} B_{i,k}\}$ ニ由リニツノ factor set ノ間ノ積ヲ定義スレバ factor set ノ全体 $F(\mathfrak{N}, \mathfrak{L})$ ハ group ヲ作ル。

且 $F(\mathfrak{N}, \mathfrak{L}) \simeq \mathfrak{N}_1 \times \cdots \times \mathfrak{N}_n \times \mathfrak{N}_{1,2} \times \cdots \times \mathfrak{N}_{i,k} \times \cdots \times \mathfrak{N}_{n-1,n}$

コヽデ $i<k$, $\mathfrak{N} \simeq \mathfrak{N}_i$, $\mathfrak{N}_{i,k} \simeq \mathfrak{N}^{(t_k)} = \{N \mid N \in \mathfrak{N}, N^{t_k} = E\}$ トスル。

[Proof] $A_{i,k}^{t_k} = E$, $B_{i,k}^{t_k} = E$ ナラバ $(A_{i,k}^{-1})^{t_k} = E$, $(A_{i,k} B_{i,k})^{t_k} = E$ ナル故 $F(\mathfrak{N}, \mathfrak{L})$ ガ group ヲ作ル事ハ明デアル。且 factor set $\{A_i, A_{i,k}\}$ ハ A_i ハ $\mathfrak{N}$ カラ, $A_{i,k}$ ハ $\mathfrak{N}^{(t_k)}$ カラ任意ノ元ヲトル事ニ由リ得ラレル故, 後半モ明デアル。

[Definition]

$\{A_i, A_{i,k}\} \sim \{A_i', A_{i,k}'\}$, $\{B_i, B_{i,k}\} \sim \{B_i', B_{i,k}'\}$ ナラバ $\{A_i B_i,$

$A_{i,R}\ B_{i,R}\}\sim\{A_i'\text{-}B_i', A_{i,R}'\ B_{i,R}'\}$ナル故 $F(\mathfrak{N}.\mathfrak{L})$ヲ equivalentナ class ニ分テバ、ソレハ又abelian groupヲ作ル。ソレヲ $\mathfrak{N}$ノ $\mathfrak{L}$ ニ由ル extention ノ group トイヒ、$\mathcal{E}(\mathfrak{N},\mathfrak{L})$ デ表ハス。

equivalentノ定義ヨリ直ニ $\mathcal{E}(\mathfrak{N}.\mathfrak{L})$ハ決定サレル。即チ

[Theorem 4.3]

$$\mathcal{E}(\mathfrak{N},\mathfrak{L})\simeq \mathfrak{N}_1/\mathfrak{N}_1^{t_1}\times\cdots\times\mathfrak{N}_n/\mathfrak{N}_n^{t_n}\times\pi_{12}\times\cdots\times\mathfrak{N}_{n-1,n}$$

[Theorem 4.4]

$\mathcal{E}(\mathfrak{N}.\mathfrak{L})$ノ order ハ $\prod_{i=1}^{m}\prod_{R=1}^{n}(\Delta_i.t_R)^k$ デアル。

コヽデ $(\Delta_i.t_R)$ ハ Δ_i ト t_R ノ greatest common divisor デアル。

[Proof.] $\mathfrak{N}^{t_R}=(N_1^{t_R})\times\cdots\times(N_m^{t_R})$

$\therefore \mathfrak{N}/\mathfrak{N}^{t_R}=(N_1)/(N_1^{t_R})\times\cdots\times(N_m)/(N_m^{t_R})$

コヽデ $N_i/(N_i^{t_R})$ノ order ハ (Δ_i, t_R) 故ニ $\mathfrak{N}/\mathfrak{N}^{t_R}$ノ order ハ $\prod_{i=1}^{m}(\Delta_i, t_R)$ デアル。

又 $\mathfrak{N}^{(t_R)}=(N_1^{(t_R)})\times\cdots\times(N_m)^{(t_R)}$ デ $(N_1)^{(t_R)}$ノ order ハ $(\Delta_1.t_R)$ 故ニ $\mathfrak{N}^{(t_R)}$ノ order ハ $\prod_{i=1}^{m}(\Delta_i.t_R)$

故ニ上ノ定理ヲ得ル。 q.e.d