



Title	二次元関集合体ノ上ノ測地線ノ延長（Ⅱ）
Author(s)	矢島, 猛
Citation	全国紙上数学談話会. 1948, 2(7), p. 205-209
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75205
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

70. 二次元閉曲面体上ノ測地線ノ延長 (II)

(阪大) 矢島 盛

前誌(第5号: 6月10日)デハ E (4) ハー次元連結集合デアルコトヲ証明シ
—205—

マシタ。本号デハ更ニ $E(a)$ ハ(1)局所連結ナルコト (2) *arcwise* ニ連結ナルコトヲ証明シマス。

6. 基本準備定理

先ツ前談話デ要ク用ヒタ $H(A, B)$ ノ論法ヲ整理シテ基本準備定理トシテ掲ゲマス。前談話ノ (4.C) 以外ハ若手ノ修正ヲ施シテ此ノ基本準備定理ガ便ヘマスガ、(4.C) ハ差ヘハ同ジデスガ此ノ基本準備定理トハ若干異ナリマス。

基本準備定理 一点 a ト三ツノ 集合 A, B, C ガアツテ

- (i) C ハ連結集合
- (ii) $x \in C$ ナラバ $\overline{ax} \cdot (A+B) \neq 0$
- (iii) $x \in C$ デ $\overline{ax} \cdot \bar{A} \neq 0$ ナラバ $\overline{ax} \cdot B = 0$, $\overline{ax} \cdot \bar{B} \neq 0$ ナラバ $\overline{ax} \cdot A = 0$
- (iv) $\overline{ax_1} \cdot A \neq 0$, $\overline{ax_2} \cdot B \neq 0$ トナルヤワナ $\overline{ax_1}, \overline{ax_2}$ ($x_1, x_2 \in C$) ガ存在スナルトキ $x_0 \in C$ ガ存在シテ a, x_0 ハ少クモニツノ異ナル $g.s.$ デ結バレル。即ち *split* ニナル。

(注) C ヲ二部ニ分ケル。 $x \in C$ ナルトキ $\overline{ax} \cdot A \neq 0$ トナル $\overline{ax}$ ガアレバ、

$x \in C_A$, $\overline{ax} \cdot B \neq 0$ ナラ $x \in C_B$ トスル。 (iv) カラ $C_A \neq 0$, $C_B \neq 0$ 三 (ii) カラ $C = C_A + C_B$, (i) カラ $C_A \bar{C}_B + \bar{C}_A C_B \neq 0$ 何レデモ同ジダカラ $C_A \bar{C}_B \neq 0$ トスル。 $x_0 \in C_A$, $x_i \in C_B$, $x_i \rightarrow x_0$ トナル x_0 ト $\{x_i\}$ ガアル。 $x_i \in C_B$ ダカラ $\overline{ax_i} \cdot B \neq 0$ トナル $\overline{ax_i}$ ガアル。 $x_i \rightarrow x_0$ ナルトキ $\overline{ax_i}$ ハ a ト x_0 ヲ結ブ $g.s.$ ノ一ツ $\overline{ax_0}$ ニ収斂スル。 $\overline{ax_0} \cdot \bar{B} \neq 0$ デアル。 (iii) ニヨリ $\overline{ax_0} \cdot A = 0$ デアル。 シカルニ $x_0 \in C_A$ ダカラ $\overline{ax_0} \cdot A \neq 0$ トナル $\overline{ax_0}$ ガ存在スル。 $\overline{ax_0}$ ト $\overline{ax_i}$ ハ明カラニ異ナルカラ a ト x_0 ヲ結ブ少クモニツノ $g.s.$ 即ち *split* ガ得ラレタ。(以上)

基本準備定理ノ応用トシテ次ノコトガ言ヘマス。

(6.A) 任意ノ $\overline{ab}$ ニ対シ $C \in \overline{ab}$, $cb < \delta/2$ ナル点 C ヲトレバ $\overline{cb}$ ハ延長出来ル。 ($\overline{cb}$ ガ延長出来ルトハ $\overline{cb}$ ガ b ノ方向ニ延長出来ルコト)

(證) $\overline{ab}$ 上ニ $cb < \delta/2$ ナル点 C ヲトルトキ $\overline{cb}$ ガ延長出来ナイトスル。

b ヲ中心トシ cb ヲ半径トスル円ヲ K_b トシ、 C ヲ中心トシテ $\rho > 0$

($\rho < \min(ca, cb)$) ヲ半径トスル円ヲ K_c トスル。 K_c ハ $\overline{ab}$ ニヨリ

ニツノ弧ニ分ケラレル。其ノ両端ヲ含マナイ部分ヲ A, B トスル。又 Kb ト A ノ交点ノ中 Kb 上 C カラ最遠ノ点ヲ p , Kb ト B ノ交点ノ中 C カラ最遠ノ点ヲ q トスル。 Kb ハ p, q ニヨリニツノ弧ニ分ケラレル。 Kc ノ内部ト共通点ヲ持タナイ万ヲ p, q モ含メテ C トスル。点 C ヲ基本予備定理ノ a ト考ヘルト $\chi_0 \in C$ ガ存在シテ C, χ_0 ハ異ナルニツノ q ニテ結ベレル。コレハ $C\chi_0 \leq cb + b\chi_0 < \delta$ ニ示スル。

7. 定理 2. $E(a)$ ハ局所連結デアル

証) $p \in E(a)$ ニ於テ $E(a)$ ハ局所連結デナイトスル。 $\overline{ap}$ 上ニ $qp < \frac{\delta}{2}$ ナル点 q ヲトレバ $(6A)$ ニヨリ $\overrightarrow{qp}$ 延長出来ル。其ノ延長上ニ p ニ十分近ク r ヲトレル。別ニ r ニ於テ $\overline{ap}$ ノ両側ニ (前法依リ。参照) S, t ヲトレバ $\overline{ap}$ ト st ニ交ハル。ソレヲ改メテ q トスル。 $\triangle rst$ ノ直径ヲ十分小サクトレバ内部ガアル。ソレヲ U_p トスル。

$p_i \rightarrow p$ トナル $E(a)$ ノ点列 $\{p_i\}$ ガアツテ U_p ニ於ケル p, p_i ヲ含ム $E(a)$ ノ成分 C_p, C_{p_i} ガ $C_p \cdot \overline{C_{p_i}} + \overline{C_p} \cdot C_{p_i} = 0$ トナツタトスル。 $\overline{ap_i}$ ハ $i \rightarrow \infty$ ナルトキ $\overline{ap}$ ノ一ツニ収斂スルカラ初メカラ $\overline{ap_i} \rightarrow \overline{ap}$ ト仮定シテヨイ。故ニ $\overline{st}$ ト $\overline{ap_i}$ ノ交点ヲ q_i トスレバ $q_i \rightarrow q$ 。簡単ノタメ $q_i \in \overline{qr}$ トスル。任意ノ i ニ対シ $\chi_i \in \overline{q_i}$ ヲ適当ニトレバ $\overrightarrow{a\chi_i}$ ノ延長ガ $\overline{st}$ ヲ又ハ $\overline{tr}$ ニ交ハルヤワニ出来ル。問答 若ノソウデナケレバ s ヘテノ $\chi_i \in \overline{q_i}$ ニ対シ $\overrightarrow{a\chi_i}$ ノ延長点ハ U_p 内ニアル。其ノ集合ハ予備定理 2 ト同ノ方法ニヨリ U_p ノ内部ニ於ケル $E(a)$ ノ連結集合ニ含マレ。然ツテ $C_p \cdot \overline{C_{p_i}} + \overline{C_p} \cdot C_{p_i} = 0$ ニ反ス。故ニ $\chi_i \in \overline{q_i}$ ガアツテ $\overrightarrow{a\chi_i}$ ノ延長ハ $\overline{st}$ ヲ又ハ $\overline{tr}$ ニ交ハル 交点ヲ y_i トスル。 $\overline{\chi_i y_i}$ ハ U_p ヲニツノ部分ニ分ケ其ノ各々ノ部分ニ p, p_i ガ含マレル。 $i \rightarrow \infty$ トスルトキ $p_i \rightarrow p$ ダカラ $\overrightarrow{ay_i}$ ノ向ノ点デ p ニ収斂スルモノガアル。コレハ $p \in E(a)$ ニ反ス。

8. 予備定理 3 $p \in E(a)$ ナルトキ $\varepsilon > 0$ ヲ十分小ニトレバ $E(a) \cap S(p, \varepsilon)$ ノ p ヲ含ム成分ハ *arcwise* ニ連結デアル。

(証) $\varepsilon < \frac{\delta}{4}$ トシテ $S(p, 2\varepsilon), S(p, \varepsilon)$ ノ境界ヲ夫々 K_1, K_2 トスル。

$E(a), S(p, \varepsilon)$ ノ p ヲ含ム成分ヲ C_p トスル。 $q \in C_p$ ナルトキ p, q ガ $E(a)$

ノ ω に π 結バレルコトヲ証明スル。 $\overline{ap}$ ト K_1, K_2 ハ夫々唯一点デ交ハル b, c トスル。 $\overline{aq}$ ハ K_1, K_2 ト一般ニハ一点デ交ハラナイガ其ノ交点ノ集合ハ $\overline{ac}$ 集合ガカ $\overline{K_2}$ 上 $\overline{C}$ カ $\overline{a}$ 一定ノ方向ニ進ムトキ最初ノ点ト最後ノ点ガアル。夫々 r, s トスル。 K_2 ノ弧 $\widehat{cr}$ 。 $\widehat{cs}$ ヲ夫々 A, B トシ其ノ両端ヲ除イタモノヲ A', B' トスル。又 $\overline{rs} = \overline{C}$ トスレバ $C \in S(p, 2\varepsilon)$ デ C ハ $\overline{ap}$ ト交ハラナイカラ $A + B + C = K_2'$ トスレバ。 K_2' ハ $\overline{P}$ ト位相合同デ $S(p, 2\varepsilon) = \text{含マレ}$ P ヲ内部ニ含ム。 q ハ K_2' ノ内部ニ含マレル。何者 若シ外部ニアレバ $C \in \overline{P} \neq 0$ トナリ C ガ $\overline{aq}$ ノ向ノ点ノ集合ナルコトニ及ス。 $r \in \overline{qs}$ 又ハ $s \in \overline{qr}$ デアリ $q \in \overline{rs}$ トスル。 $\overline{qr}$ ハ $\overline{K_2'}$ ノ内部ニアル。 $\overline{aq}$ ト K_1 ノ交点ノ中 S ニ最も近い点ヲモトスル。

K_2' ノ内部ニアツテ $\overline{qr}$ ト交ラズ且 P ヲ内部ニ含ム多角形 P ヲトル (多角形トハ有限個ノ点ヲ順ヌ q, s デ結ンダ $\overline{P}$ ト位相合同ナ図形) P ト $\overline{ap}$ ノ交点 π ノ順序ニ從ツテ $d_1, d_2, \dots, d_n$ トスル。 d_i ト d_{i+1} ヲ結ブ P ノ部分ヲ P_i トスレバ $P_i + \overline{d_i d_{i+1}}$ ガ P ヲ内部ニ含ムヤウナレガアル。 $i=1$ トスル。 P_1 ハ d_1, d_2 ノ他 $\overline{ap}$ ト共通点ヲ持タナイ。 P_1 カラ d_1, d_2 ヲ除イタ部分ヲ P_1' トスレバ $x \in P_1'$ ニ對シ $\overline{ax}$ ハ $A + B' = \text{必ズ}$ 交ハル。又 $\overline{ax} \cdot \overline{A'} = \overline{ax} \cdot \overline{A}$ ナラバ $\overline{ax} \cdot \overline{B'} = 0$ デアリ。何者若シソウデナケレバ $\overline{ax}$ ハ A', B' ト共通点ヲ持ツ y_1, y_2 トスル。 $y_1, y_2 \in S(p, 2\varepsilon)$ デアリ。 $\widehat{Cy_1} + \widehat{y_1 y_2} + \widehat{Cy_2} = K_2''$ トスレバ P ハ K_2'' ノ内部ニ含マレ q ハ外部ニアル。從ツテ $C(p, q)$ ガ連結ナルコトニ及ス。故ニ $\overline{ax} \cdot \overline{A'} \neq 0$ ナラ $\overline{ax} \cdot \overline{B'} = 0$ 。同様ニ $\overline{ax} \cdot \overline{B'} \neq 0$ ナラ $\overline{ax} \cdot \overline{A'} = 0$ 。次ニ x ヲ d_1, d_2 ノ十分近クニトレバ。 $\overline{ax_1} \cdot \overline{A'} \neq 0, \overline{ax_2} \cdot \overline{B'} \neq 0$ トナル x_1, x_2 ノ存在スルコト明ラカデアル。

基本定理ニ於ケル A, B, C トシテ A', B', P_1' ヲトレバ $x_0 \in P$ ガアツテ a, x_0, x 夫々 $A', B' = \text{交ハルニツ}$ ノ q, s ヲ結バレル。故ニ $x_0 \in E(a)$ 。 P ヲ任意ニトルトキ x_0 ノ集合ニ P, q ヲ加ヘタモノヲ $C(p, q)$ トスル。 $x_i \in C(p, q), x_i \rightarrow x$ ナラバ a, x ハ夫々 A, B' ト交ハルニツノ q, s ヲ結バレルカ又ハ x ハ P, q ト一致スル。故ニ $C(p, q)$ ハ閉集合デアリ。

次ニ $C(p, q)$ ガ連結集合ニナルコトヲモツ 連結テナイトシテ P ヲ含ム成

分ヲ $C_1(p, q)$, 残りヲ $C_2(p, q)$ トシ $C_1(p, q)$ ト $C_2(p, q)$ ノ距離ヲ δ_1 トスル. $\delta_1 > 0$. $C_1(p, q)$ ト $K'_2 + \overline{Yq}$ トハ閉集合ヲ共通点ヲ持タナイカラ距離 $\delta_2 > 0$ ガアル. K'_2 及び其ノ内部ヲ三角形分割シテ各々ノ三角形ノ直径ガ $\frac{\rho}{3}$ ($\rho < \min(\delta_1, \delta_2)$) ヨリ小ニナルヤウニスル. $C_1(p, q)$ ノ点ヲ内部又ハ辺上ニ持ツ三角形ノ和集合ノ境界ハ一般ニ数個ノ多角形カラナリ. 且 $C_1(p, q)$, $C_2(p, q)$, $K'_2 + \overline{Yq}$ ノ点ヲ含マナイ. 其ノ中ニ p ヲ内部ニ含ムモノガ存在スル. コレヲ P トスレバ P ハ K'_2 ノ内部ニアリ $\overline{Yq}$ ニ交ラズ P ノ内部ニ含ム. 故ニ P ノ上ニ $C(p, q)$ 点ガアル 矛盾故ニ $C(p, q)$ ハ連結集合デアル.

$x \in C(p, q)$ トスレバ ax ヲ結び、夫々 A, B' ト交ハルニツノ q S ガアル. $\overline{ax'}$, $\overline{ax}$ トスル. $\overline{ax'} + \overline{ax}$ ハ K'_2 ヲニツノ部分ニ分ケ各々ノ部分ニ p, q ヲ含ムカラ x ハ $C(p, q)$ ノ cut point デアル. 故ニ $C(p, q)$ ハ p, q ヲ結ブ arc デアル.

定理 3. $E(a)$ ハ arcwise ニ連結デアル.

[證] 定理 2 ト 手廻定理 3 トカラ容易ニ証明出来ル.

後記 コレデー應報告ヲ終リマス. $E(a)$ ガ arcwise ニ連結ナコトガ E ヘマシタカラ、コレカラ $E(a)$ ノ order ニ関スルコトハ容易ニ出マスガ面白クナイカラ省略シマス. 此ノ邊 $E(a)$ ノ 1-dim ベツチ数ト Ω ノ 1-dim ベツチ数が等シイコトモ成立シソウデスガネヲ証明出来マセン. (実ハコレガ本誌誌ノ主目的ナノデスガ). 尚此ノ研究ニハ寺阪教授ノ一方ナラ又御指導ヲ得マシタコトヲ衷心ヨリ感謝致シマス.

(1977. 11. 2)