



Title	重心ノcharacterization
Author(s)	石原, 忠重
Citation	全国紙上数学談話会. 1948, 2(7), p. 209-215
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75206
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

71. 重心 / characterization

(阪大) 石原 思 聖

「平面及空間図形ノ重心ヲ characterize 出来ナイカ？」ト云フ希波先生ノ問題ヲ同先生ノ御教示ヲ受ケナガラ秀ハテ見タ。直線図形ニ就シテハ一応ノ結果ヲ得タノデ報告スル。

以下図形 ($\alpha, \beta, \dots$) ハスベテ有界ナ且堅度一株ナ図形デアリ $m(\alpha), m(\beta), \dots$ ハソノ重心ヲ表ハス。又三ハ合同, α 及 β ハ点 O 及 P ヲ結ブ直線, α 及 β ハ直線 α 及 β ノ交点トスル。

重心ニ対スル *axiom*

- C_1 相同ナル図形ノニ対シテモ ソノ重心 $m(\alpha)$ ナル一点ガ存在シ唯一点ニ限ル。
- C_2 合同ナニツノ図形ノ 重心ハ合同ナ位置ニアル。
- C_3 ニツノ図形 α, β カラ重様シナイデ合成サレタ図形 $\alpha + \beta$ ノ重心 $m(\alpha + \beta)$ ハミトノ図形ノ各重心 $m(\alpha), m(\beta)$ ヲ結ブ直線上ニアル。
- C_4 如何ナル図形ニ対シテモソノ重心ノ存在スル有界ナ範圍ヲ取レル。

Theorem

直線, 図形, $C_1 - C_4$ ヲ充タス点ハ正例定義サレタル重心

$$\left(\text{明} \frac{\sum m_i y_i}{\sum m} \text{ of } x_0 = \frac{\iiint x dV}{V} \quad y_0 = \frac{\iiint y dV}{V} \quad z_0 = \frac{\iiint z dV}{V} = \text{ヨル重心} \right)$$

ト一致スル。

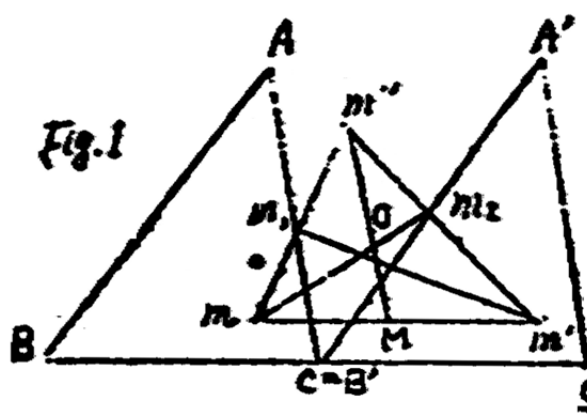
証明

必要ハ *trivial*, 充分ノ証明ヲ *lemma* ヲ重ネタ形ヲ行フ。

Lemma 1.

対稱図形ハ対稱ノ中心 (点, 直線, 平面) 上ニ重心ガアル。 (明カ)

Lemma 2. (平面上)



(証) 図ニ於テ $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ ナラバ $m(\triangle ABC + \triangle A'B'C')$ ハ $m(\triangle ABC)$ ト $m(\triangle A'B'C')$ トノ中点デアル。

証、 図ニ於テ m_1, m_2 ハ AC, AC ノ中点ト入。

$$m(ABCA) = m_1, \quad m(A'AB'C') = m_2'$$

$$m(ABC'A') = \sigma \quad m(ACA') = m''$$

$$m(ABC + A'B'C') = m' \quad m m' = M. \text{ (以上)}$$

Lemma 3. (平面上)

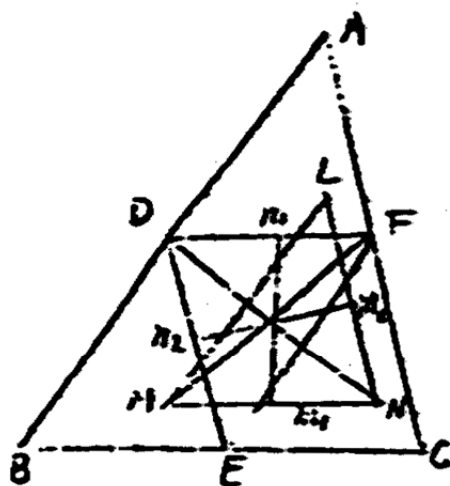


Fig. 2

四二於テ $m(\triangle CEF) = N$, D ハ AB ノ中點ト
スレバ $m(\triangle ABC)$ ハ ND ノ中點ナリ.

$$\text{(証)} \quad m(AFD) = L, \quad m(BDE) = M, \\ m(CEF) = N$$

MN, NL ノ中點ヲ m_1, m_2 ,

FD, ED ノ中點ヲ n_1, n_2

$$(n_1 m_1 \wedge m_2 n_2) = \sigma \text{ トスル}$$

$$m(ABC) = \sigma \text{ トナル}$$

又 m_1, m_2, n_1, n_2 ハ平行四邊形ナリ

$$On_1 = Om_1 \quad \text{故ニ } O \text{ ハ } ND \text{ 上ニアリ 且 } NO = OD \text{ (以上)}$$

Lemma 4 (平面上)

三角形ノ重心ハ通例ノ重心ニ一致スル^{*}

(証) 四ノ初ノ各邊ガ $\frac{1}{2}$ ノ三角形

ヲ頂点 C ヲ共通ニ次々ト作り.

$A'B'C', A'E'C', \dots$ トシ.

$$m(ABC) = O_0, \quad m(A'E'C') = O_1,$$

以下 $O_2, O_3, \dots$ トスレバ

$$DO_0 = O_0 O_1, \quad D'O_1 = O_1 O_2, \dots$$

トナル. O_0 ガ通例ノ重心ト一致シナ

ケレバ $\triangle ABC \quad \triangle A'B'C' \dots \rightarrow C$ ニツレテ $D^{(n)} O_n$ ノ距離ハ無限ニ大
トナリ C_0 ニ収スルコトヲ容易ニ証明出来ル.

即 D ヲ頂点 DC ヲス軸. ソレニ垂直ニ y 軸 C ヲ $(1, 0)$ $O_n = (x_n, y_n)$
トスレバ.

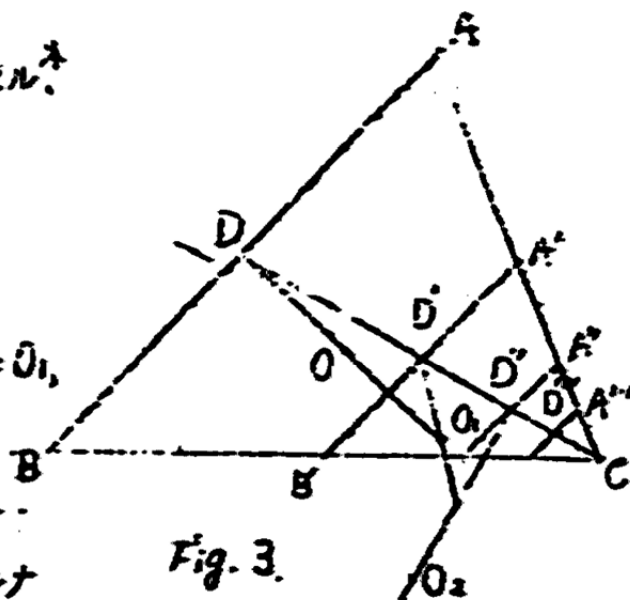


Fig. 3.

* 相似図形ノ重心ハ相似ノ位置ニアルコトヲ既述スレバ 極メテ簡便ニ証明出来ル.

recursion formulae $\begin{cases} y_{n+1} = 2y_n \\ x_{n+1} = 2x_n - (1 - \frac{1}{2^n}) \end{cases}$ ラ得テ

$y_0 \neq 0$ ナラバ $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \pm \infty$ トナルカラ $y_0 = 0$ ガ必要. 又 $x_0 \neq \frac{1}{3}$ ナラバ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \pm \infty$ トナルカラ $x_0 = \frac{1}{3}$ ガ必要 (以上)

Lemma. 5 (立体)

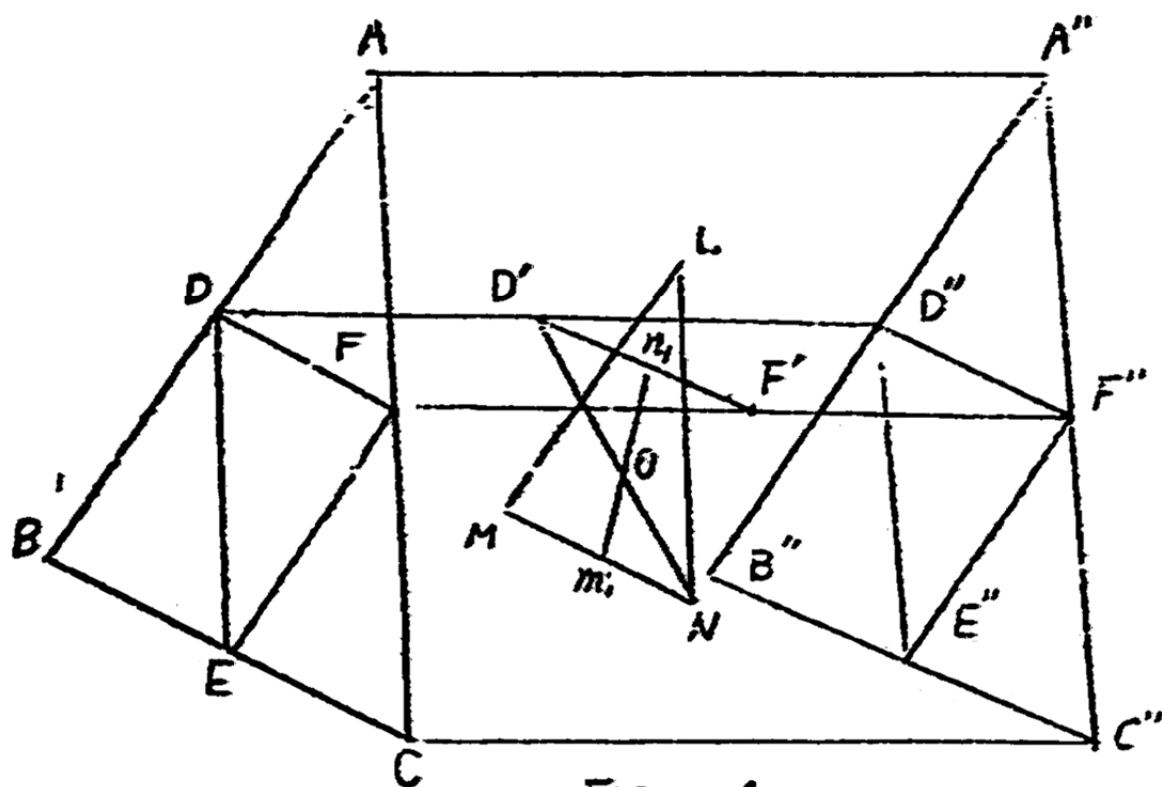


Fig. 4

三角柱ノ重心ハ通常ノ重心ト一致スル.

(証) 三角柱ヲ $\square$ ト認ス.

$\square$ ADF, BDE, CEF ノ重心ヲ L, M, N トスル. DD'' , EE'' , FF'' ノ中点ヲ D' , E' , F' トスル.

$\triangle LMN$ ノ平面ト $\triangle D'E'F'$ ノ平面ハ平行ニシテ Lemma 3 ト同様ノ方
モガ便ヘテ $\square ABC$ ノ重心ハ ND' ノ中点トナリ. 故ニ Lemma 4 ノ証明ヲ
三次元ニ拡張シテ用フレバコノ Lemma ガ証サレル.

Lemma 6. (立体)

以下三角柱ヲ $\diamond$ デ表ハス.

因ニ於テ $\diamond ABCD \equiv \triangle A'B'C'D'$ ナラバ.

$m_1 (\diamond ABCD + \diamond A'B'C'D')$ ハ $m_1 (\diamond ABCD)$ ト $m_2 (\diamond A'B'C'D')$ トノ中点ニナル.

証. $n_1, n_2 \parallel m_1, m_2$ ヲ用フ
ル外 lemma 2ノ証明ト同
様ナ方法ニヨレバヨイ.

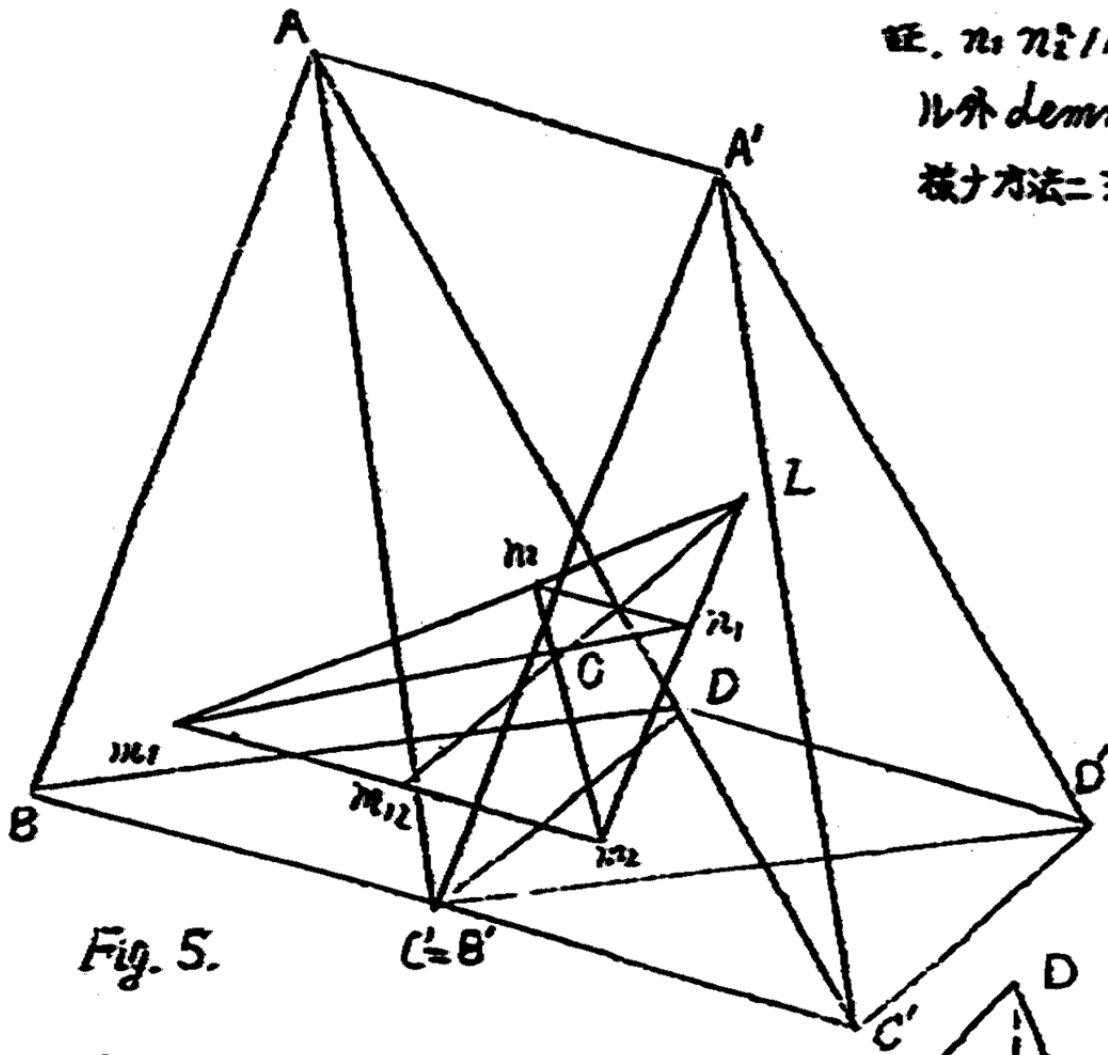


Fig. 5.

Lemma, 7. 三角錐ノ重心ハ諸面ノ重心
ト一致スル.

証

(a) 圖ニ於テ E, ..., Kハ各
稜ノ中點トスル.

$FH \cap EK = m_5$ トスル.

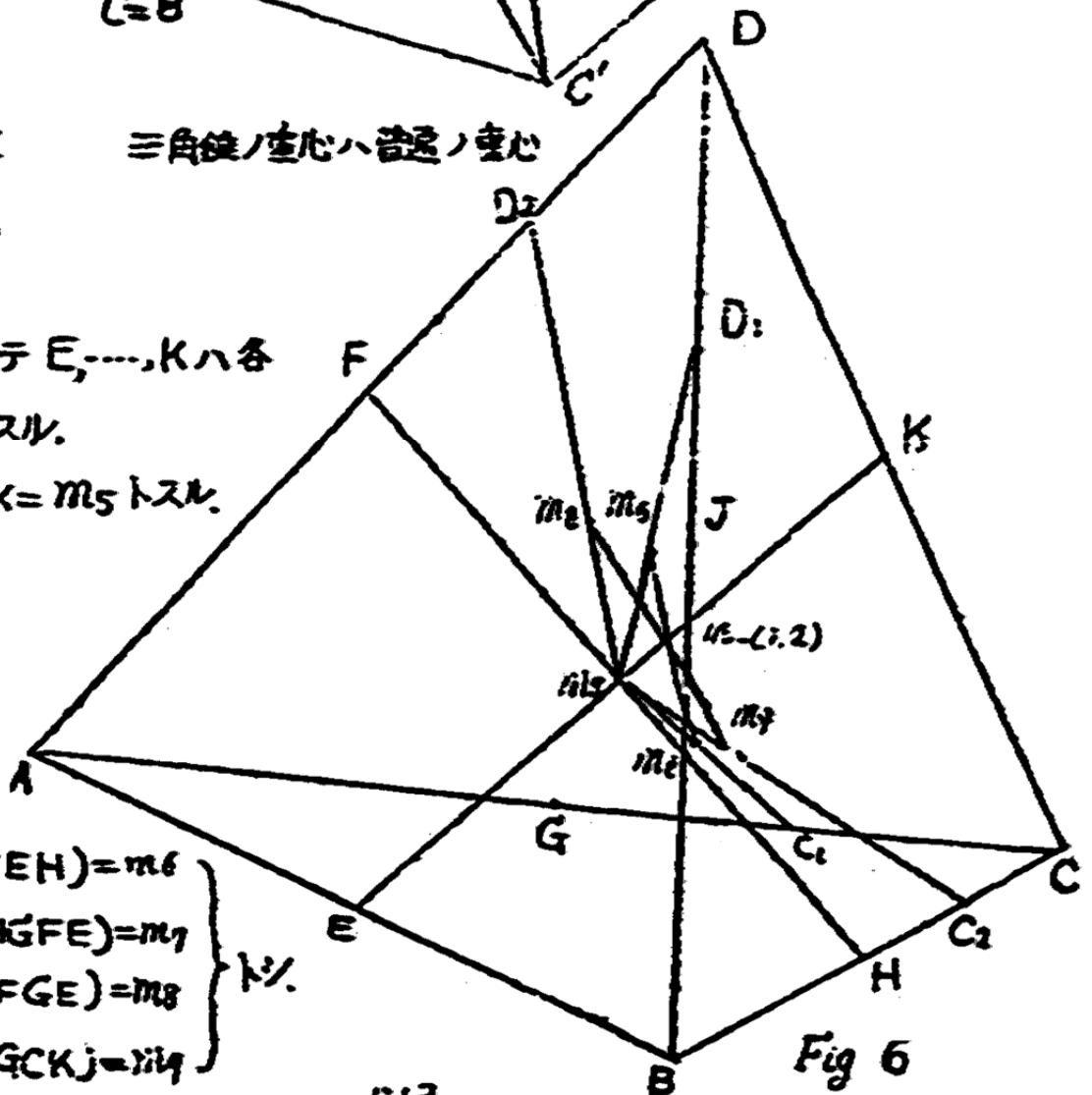


Fig 6

$$\left. \begin{aligned} m(\textcircled{V} DFKJIEH) &= m_6 \\ m(\textcircled{V} CKHGFE) &= m_7 \\ m(\textcircled{V} DKJFGE) &= m_8 \\ m(\textcircled{V} EHJGCKJ) &= m_9 \end{aligned} \right\} \text{ト}.$$

又 $m_{-(1,2)}$ が $\triangle AEC$ の D から $\triangle AEGF$ と $\triangle JEBH$ との重心とスル

$$m_{-(1,2)} = (m_6 \cup m_7) \cap (m_8 \cup m_4) \text{ ヲ得ル.}$$

Gauche 四角形ノ対辺ノ中線ノ定理ニヨリ $m_{-(1,2)}$ ハ m_5 上ニアリ.

又 *lemma* 5 カラ $m_5 m_{-(1,2)} = \frac{1}{6} m_5 K$ ヲウル.

(b) $\triangle AEGF, BEJH, CGHK, DFJK$, 重心ヲソレゾレ m_1, m_2, m_3, m_4 トシ $m(\triangle AEGF + \triangle BEJH) = m_{12}$ トスル.

同様ニ m_{34} 又 (a) ト同様ニ $m_{-(3,4)}$ ヲ得.

$$(m_{12} \cup m_{-(1,2)}) \cap (m_{34} \cup m_{-(3,4)}) = m_0$$

トスレバ $m_0 = m(\triangle ABCD)$ デアル.

(c)

$$m(\triangle m_1 m_2 m_3 m_4) = m_0' \text{ トス.}$$

レバ,

$$m_0' \text{ ハ } \triangle m_1 m_2 m_3 m_4$$

ト $\triangle ABCD$ トノ重心ノ

中心ニアリ.

又

$$(m_{12} \cup m_{34}) \cap (m_{14} \cup m_{23}) = m_0' \text{ トスル.}$$

(d)

$$m_5 m_5' \text{ ハ } m_0' \text{ ヲ通ル}$$

$$\text{又 } m_5 m_0 \text{ ハ } m_0' \text{ ヲ通ル}$$

$$\text{又 } m_5 m_5' = m_5' m_0' \text{ ヲ得ルガスヲ } 4a \text{ トオク.}$$

「メネラウスノ定理」ヲ用ヒ

$$\frac{m_5 m_0}{m_0 m_0'} = \frac{m_5 m_{-(1,2)}}{m_{-(1,2)} E} = \frac{1}{7} \text{ ヲ得テ.}$$

$$\text{結局 } m_5 m_0 = a = \frac{1}{4} (m_5' m_0') \text{ ガ得リ}$$

$a \neq 0$ ナラバ 各線 $\frac{1}{2}$ ノ $\triangle$ ヲ次々ト作り、ソノ重心ト対辺ノ中線ノ交点ヲ $m_5^{(2)}, m_0^{(2)}$ トスレバ

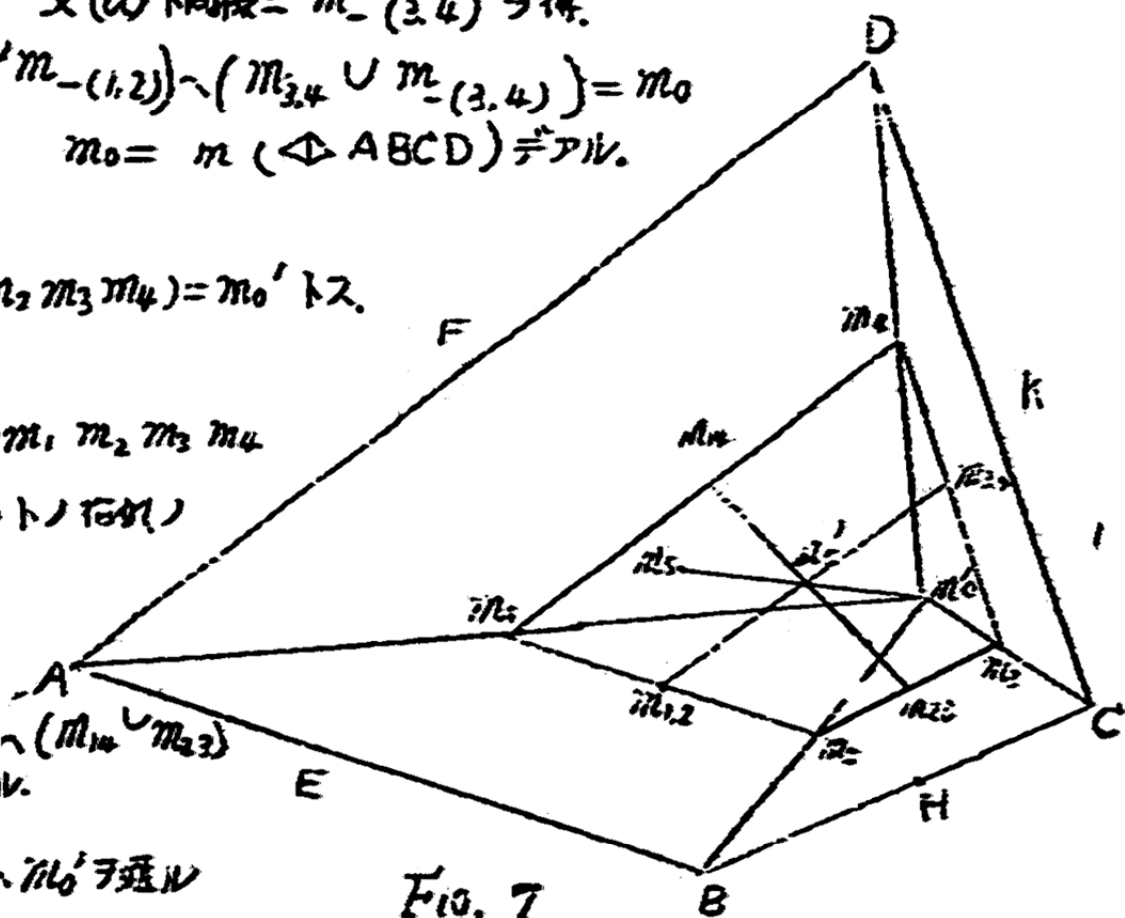


Fig. 7

$\lim_{i \rightarrow \infty} m_s^{(n)} m_0^{(n)} = \infty$ トナリ矛盾
(Lemma 証3)

主定理ノ証明ハ平面ノ場合ニハ必要ナ四
角ダケノ異ツタ分限法デ三角形ニ分解シ、

重心線ノ交点ヲ求メラレル。

立体ノ場合ニモ 四角柱
ノ重心ガ求マル事ヲ考

慮スレバ爾余ハ

平面ト同様ニ之 A
メ得ル。

一般ノ曲線図形及曲面体ニ因シテ

Continuity ヲ満足セスニ出セルカ

ドウカハマダ判ラヌ。然る度ニ一様ナラザル場合、密度ニ

比例シタ高サデ立体ヲ作リ多面形トナル時ハソノ重心ノ射影デ定義出来テ、通例ノ
重心ト一致スル。

至極ニ涉リ多クノ適切ナ解説ヲ頂イタ事ニ対シ寺阪先生ニ早ク感謝ノ意ヲ表ス
ル。

1947. 11. 3

