



Title	正田氏の一定理について
Author(s)	遠山, 啓
Citation	全国紙上数学談話会. 1948, 2(7), p. none-none
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75207
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

72. 正田氏の一定理について

(東京工大) 遠山 啓

正田教授は任意の代数的閉体においては *unimodular* な行列 A を適当な二つの行列 B 及 C の交換子として表はせる事を証明された。(時報 13 (1937) 341-345)

$$A = BCB^{-1}C^{-1}$$

この定理が既知の *compact* な Lie 群 - *unitary unimodular*, $U(n)$, *symplectic* $USp(2n)$ *proper orthogonal* $O^*(n)$ について成立するかどうかを調べて見ると、結果は *Abel* 的な $O^*(2)$ を除いてすべて成立する事が分った。主たる方法は対角線型に変換する事である。

(i) $SU(n)$

$SU(n)$ に属する A はすべて次の成る要素 F によつて対角線型に直る.

$$F^{-1}AF = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & \ddots \\ & & & a_n \end{pmatrix}$$

従つて A を始めからこの形と考へても一般性失はない.

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & \ddots \\ & & & a_n \end{pmatrix} \quad (|a_1| = |a_2| = \dots = |a_n| = 1, a_1 a_2 \dots a_n = 1)$$

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & & \\ & c_2 & \\ & & \ddots \\ & & & c_n \end{pmatrix} \quad c_i = a_1 a_2 \dots a_{i-1} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$AC = \begin{pmatrix} c_1 c_2 c_3 \dots c_n c_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & c_n c_1^{-1} \end{pmatrix}$$

こゝで

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \vdots & 1 & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & 0 & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{と置けば.}$$

$$AC = BCB^{-1}$$

従つて $A = BCB^{-1}C^{-1}$

こゝで BC は共に unitary であるが $|B|^{-\frac{1}{n}} |C|^{-\frac{1}{n}}$ を乗すれば unimodular になる.

(墨山, 学士院記事 2) (1944) 554-557 又は *Über eine nicht-Abelsche Theorie der algebraischen Funktionen* §7. (註刊)

(ii) $USp(2n)$

この場合には対角線変換が出来る. (Weyl, *Classical groups* 21-7)

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

このとき $\begin{pmatrix} \lambda_i & \\ & \lambda_i^{-1} \end{pmatrix}$ が交換子で表はされればよい. 之は $USp(2)$ に属し $USp(2)$ は $SU(2)$ と同型であるから (Pontryagin, *Topological groups* 276) 既

に (i) で証明されてゐたわけである。

(iii) $O^*(n)$.

準備として $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ と書けば、

$c(\theta) = Q R(-\theta) Q^{-1}$ が成立する。

まづ $n=4$ の場合は、

$$\begin{pmatrix} R(\theta_1) \\ R(\theta_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(\frac{\theta_1}{2}) \\ R(\frac{\theta_2}{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & \\ & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R(-\frac{\theta_1}{2}) \\ R(-\frac{\theta_2}{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q^{-1} & \\ & Q^{-1} \end{pmatrix}$$

又対角線上の $R(\theta_i)$ を二つずつ組合せると $n \equiv 1 \pmod{4}$ の場合は全部成立する。 $n \equiv 1 \pmod{4}$ のときは容易に分る。

$n=3$ のときは

$$\begin{pmatrix} R(\theta) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(\frac{\theta}{2}) \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & \\ & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R(-\frac{\theta}{2}) \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & \\ & -1 \end{pmatrix}$$

$n \equiv 3 \pmod{4}$ も容易に分る。

$n \equiv 2 \pmod{4}$ の場合は $n=2$ では成立しないから $n=6$ から始めなければならぬ。

$$\begin{pmatrix} R(\theta_1) \\ R(\theta_2) \\ R(\theta_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}) \\ R(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}) \\ R(\frac{\theta_3}{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R(-\frac{\theta_1+\theta_2}{2}) \\ R(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}) \\ R(\frac{\theta_3}{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

即ち次の定理が得られた。

[定理] $O^*(n)$, $USp(n)$, $U^*(n)$ (但し $O^*(2)$ を除く) の任意の要素は他の二つの要素の交換子として表はせる。

(1947. 11. 7)