73. 複素-B-空間ニ於ケルワ級数ニツイテ

(阪大)　　霜田　伊左衛

著者談話2) "Complex-Banach-space ニ於ケルワ級数ニツイテ" ニ於テ導イタ正則半径ノ簡單ナ條件ヲ求メタイ。ソノ為ニ必要ナZornノ定理ヲ掲載スル。

定理　複素-B-空間ニ於ケル領域Dニ於テ定義セラレ，複素-B-空間ノ値ヲトル函数$f(x)$ガ i) Dノ各点デGateauxノ微分ガアリ，ii) D内デ第一類集合ヲ除イテ連続ナルトキ，$f(x)$ハDデ正則トナル。

$U_n(x)$ ハ複素－B－空間デ定義セラレ複素－B－空間ノ値ヲトル n 次ノ斉次多項式トスル。

［定理1］ ワ級数 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)$ ニ於テ

$$\sup_{\|x\|=1} \overline{\lim} \sqrt[n]{\|U_n(x)\|}=\frac{1}{\mu} \text{トオケバ}$$

正則半径ハ 0 又ハ μ トナル。

［証明］ $\mu=\infty$ ナル場合ノ証明ハ同様デアルカラ此処デハ $\mu<\infty$ ノ場合ノ証明ヲスル。正則半径ガ 0 ナル為ノ必要且十分ナル條件ハ明カニ有界半径 $\lambda=0$ デアル。故ニ正則半径ガ 0 デナケレバ $\lambda>0$ トナル。此所ニ λ ハ $\frac{1}{\lambda}=\overline{\lim} \sqrt[n]{\sup_{\|x\|=1} \|U_n(x)\|}$ デ与ヘラレル。2)

明ニ $\mu \geq \lambda$ ナル故 $\mu>0$ トナル。又 $\|x\|<\mu$ ニ於テ $\sum\|U_n(x)\|$ ガ収斂シ $\|x\|>\mu$ ニ於テハ $\sum U_n(x)$ ガ収斂シナイヤウナ x ガ存在スル事ハ明カデアル。故ニ任意ノ正数 ε ヲトルト $\|x\|<\mu+\varepsilon$ デハ $f(x)$ ハ正則トナル事ハナイ。若シ $\|x\|<\mu$ デ $f(x)$ ガ正則ナル事ガ分レバ即チ μ ガ正則半径デアル。此ノ為ニ Zorn ノ定理ノ仮定 i), ii) ヲ証明スル。

i) $\|x\|<\mu$ ナル任意ノ点 x ヲトル。又 y ヲ空間ノ任意ノ点トスル。$\rho(>0)$ ヲ十分小サクトリ $0<\|x+\rho e^{i\theta}y\|<\mu$ $(0\leq\theta\leq 2\pi)$ ナラシメレバ $r(>1)$ ヲ適当ニトルト $0<\|r(x+\rho e^{i\theta}y)\|<\mu$ $(0\leq\theta\leq 2\pi)$ トナル。

$$\therefore \overline{\lim} \sqrt[n]{\sup_{0\leq\theta\leq 2\pi} \left\|U_n\left(\frac{r(x+\rho e^{i\theta}y)}{\|r(x+\rho e^{i\theta}y)\|}\right)\right\|}$$

$$\leq \overline{\lim} \sqrt[n]{\sup_{\|x\|=1} \|U_n(x)\|} \leq \frac{1}{\lambda}$$

故ニ任意ノ $\varepsilon(>0)$ ニ対シ n_0 ガ定マリ $n\geq n_0$ ナルトキ

$$\|U_n(r(x+\rho e^{i\theta}y))\| \leq \left(\frac{\mu}{\lambda-\varepsilon}\right)^n \text{------------} (1)$$

又 $\|r(x+\rho e^{i\theta}y)\|<\mu$ ナル故 $\sum\|U_n(r(x+\rho e^{i\theta}y))\|$ ハ収斂スルカラ

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{\|U_n(r(x+\rho e^{i\theta}y))\|} \leq 1 \text{ .... } (2)$$

$$\frac{1}{n}\log\|U_n(r(x+\alpha y))\|=g_n(\alpha)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int^{2\pi} g_n^+(\rho e^{i\theta}) \frac{\rho^2-\sigma^2}{\rho^2-2\rho\sigma\cos(\theta-\varphi)+\sigma^2}\, d\theta=V_n(\alpha)$$

トオケバ $V_n(\alpha)$ ハ $|z|<\rho$ デ調和デ $V_n(\alpha)\geq 0$, $V_n(\rho e^{i\theta})=g_n^+(\rho e^{i\theta})$ トナリ. $g_n(\alpha)$ ハ $|\alpha|=\rho$ 上デ最大値ヲトル函数デアル.[3]

$$\therefore\ V_n(\alpha)\leq g_n(\alpha)\leq \frac{\rho+\sigma}{\rho-\sigma}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_n^+(\rho e^{i\theta})\,d\theta.$$

一方 (1) ヨリ $g_n^+(\rho e^{i\theta})\leq \frac{\mu}{\lambda-\varepsilon}$ $(n\geq n_0)$

(2) ヨリ $\lim g_n^+(\rho e^{i\theta})=0$

故ニ $\overline{\lim}\, V_n(\alpha)\leq \frac{\rho+\sigma}{\rho-\sigma}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{\lim}\, g_n^+(\rho e^{i\theta})\,d\theta=0$

故ニ $|\alpha|\leq\rho'<\rho$ ナルトキ

$e^{\varepsilon'}<r$ ナルヤウナ正数 ε' ニ対シ n_0 ガ定マル $n\geq n_0$ ナルトキ

$$V_n(\alpha)\leq\varepsilon',\ 乃チ\ \|U_n(x+\alpha y)\|\leq\left(\frac{e^{\varepsilon'}}{r}\right)^n$$

然ルトキハ $U_n(x+\alpha y)=\sum_{i=0}^{n}U_{ni}(x,y)\alpha^i$ ナル故

$$\|U_{ni}(x,y)\|\leq\frac{1}{\rho^i}\left(\frac{e^{\varepsilon'}}{r}\right)^n\qquad(n\geq n_0)$$

$$\therefore\ \sum\|U_{ni}(x,y)\|\,|\alpha|^i\leq\left(\sum\left(\frac{|\alpha|}{\rho}\right)^i\right)\left(\frac{e^{\varepsilon'}}{r}\right)^n<\left(1+\frac{|\alpha|}{\rho}\right)^n\left(\frac{e^{\varepsilon'}}{r}\right)^n$$

故ニ $|\alpha|\leq\rho''<\left(\frac{r}{e^{\varepsilon'}}-1\right)\rho$ 乃チ $\left(1+\frac{|\alpha|}{\rho}\right)\left(\frac{e^{\varepsilon'}}{r}\right)<1$ ナルヤウニトレバ

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}\|U_{ni}(x,y)\|\,|\alpha|^i\right)\ ハ\ |\alpha|\leq\rho''\ デ一様ニ収斂スル.$$

故ニ $\sum\left(\sum U_{ni}(x,y)\alpha^i\right)=\sum_{n=0}^{\infty}U_n'(x,y)\alpha^n$

ト言フ事ガ出来, $|\alpha|\leq\rho''$ デ絶對収斂スルカラ α ニツキ正則トナルカラ

$\sum U_n(x+\alpha y)$ ハ x デ Gateaux ノ微分ガアル.

ii) $\|x\|\leq\mu'<\mu$ (μ' ハ任意ニトル) デ $\sum\|U_n(x)\|$ ハ収斂スル. 今

$$S_i=E\left[x\,\middle|\,\sum_{n=0}^{\infty}\|U_n(x)\|\leq i,\ \|x\|\leq\mu'\right],\quad i=1,2,3,\cdots\cdots$$

トスレバ $S_1\subset S_2\subset\cdots\cdots\subset S_i\subset\cdots\cdots$, 且 $\sum_{i=1}^{\infty}S_i=E[\|x\|\leq\mu']$.

S_i ハ閉集合デアル. 乃チモシ $x_n\in S_i$, $x_n\to x_0$ 且 $x_0\overline{\in}S_i$ トスレバ.

$\sum\|U_n(x_0)\|>i$. 故ニ ε ヲ十分小サクトレバ $\sum\|U_n(x_0)\|\geq i+3\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$ トナル. 又 $\|x_0\|\leq\mu'$ ナル故 $\sum\|U_n(x_0)\|<\infty$.

故ニ $\sum_{N+1}^{\infty}\|U_n(x_0)\|<\varepsilon$ ナル様ナ N ガアル. $\therefore\ \sum_0^N\|U_n(x_0)\|>i+2\varepsilon$

$U_n(x)$ ノ連續性ニヨリ $\|x-x_0\|\leq\delta$ ナルトキ

$$\|U_n(x)-U_n(x_0)\|\leq\frac{\varepsilon}{N+1}\quad(n=0,1,2,\cdots,N)$$

又 $n_0\leq m$ ナルトキ $\|x_m-x_0\|<\delta$ トナル故.

$$\sum_0^{\infty}\|U_n(x_m)\|\geq\sum_0^N\|U_n(x_m)\|\geq\sum_0^N\left(\|U_n(x_0)\|-\|U_n(x_m)-U_n(x_0)\|\right)$$

$$> i + \varepsilon$$

之ハ不合理デアル。故ニ S_i ハ閉集合トナル。

次ニ $\|x\| < \mu'$ 内ニ任意ノ点 x_0 ヲトル。x_0 ノ近傍 $U(x_0)$ ノ点ガスベテ S_1 ノ集合点ナラバ $U(x_0) \subset S_1$。モシ之ガイヘナケレバ $U(x_0) \ni x_1$ ガアリ $\overline{U(x_1)} \cdot S_1 = 0$ トナル。且 $\overline{U(x_0)} \supset \overline{U(x_1)}$。$U(x_1)$ ノ点ガスベテ S_2 ノ集積点ナレバ $U(x_1) \subset S_2$ 然ラザルトキハ $\overline{U(x_1)} \supset \overline{U(x_2)}$, $\overline{U(x_2)} \cdot S_2 = 0$ ……以下之ヲ繰カヘストト $U(x_0)$ ノ中ニ S_i ニ属スル $U(x_{i-1})$ ガアルカ又ハ S_i ニゾクサナイ $\overline{U(x_i)}$ ノ列ガアルカ何レカデアル。モシ後者ナレバ $\overline{U(x_0)} \supset \overline{U(x_1)} \supset \cdots \supset \overline{U(x_n)} \supset \cdots$ ナル故 $\prod \overline{U(x_i)} \ni x'$ ヲトレバ $\sum \|U_n(x')\| = \infty$ トナリ 不合理。故ニ $U(x_0)$ ノ中ニ S_i ニツクスル関集合 $U(x_{i-1})$ ガアル。

$x \in U(x_{i-1})$ ナルトキハ $\sum_{n=0}^{\infty} \|U_n(x)\| \leq i$。故ニ $S_m(x) = \sum_{n=0}^{m} U_n(x)$ トオケバ。$S_m(x)$ ハ $U(x_{i-1})$ デ正則デ一様有界 且 $\lim S_m(x) = f(x)$ ナル故 $f(x)$ ハ $U(x_{i-1})$ デ正則デアル [4] 勿論 $U(x_{i-1})$ デ連続デアル。$\|x\| < \mu'$ デ連続点ノ集合ハ稠密トナリ μ' ハ $\mu' < \mu$ デ任意デアルカラ (ii) ハ満足サレル。従ツテ Zorn ノ定理ニヨリ $f(x)$ ハ $\|x\| < \mu$ デ 正則デアル。乃チ μ ハ正則半径トナル。(以上)

$\|x\| = 1$ ニ於ケル Compact set G ノ集合ヲ $\mathfrak{K}$ トスル。

〔定理 2〕 ワ 級数 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)$ ニ於テ

$$\sup_{G \in \mathfrak{K}} \overline{\lim} \sqrt[n]{\sup_{x \in G} \|U_n(x)\|} = \frac{1}{\tau}$$

トオケバ、正則半径ハ τ トナル。[5]

〔証明〕 $0 < \|x\| < \tau$ ニ含マレル任意ノ compact set ヲ G' トスル。

$x \in G'$ ナル時 $\frac{x}{\|x\|} = y$ トオケバ y ノ集合ハ $\|x\| = 1$ ニ於ケル compact set G トナル。

$$\therefore \overline{\lim} \sqrt[n]{\sup_{y \in G} \|U_n(y)\|} \leq \frac{1}{\tau} \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$

G' ハ compact set ナル故、$\sup_{x \in G'} \|x\| = \|x'\| \quad (x' \in G')$。

$0 < \varepsilon < \tau - \|x'\|$ ナル任意ノ ε ヲトルト之ニ対シ n_0 ガ定マリ $n \geq n_0$ ナルトキ (1) ヨリ $\sup_{y \in G} \|U_n(y)\| \leq \frac{1}{(\tau - \varepsilon)^n}$

$$\therefore \quad \|U_n(x)\| \le \left(\frac{\|x'\|}{\tau-\varepsilon}\right)^n \quad (x\in G',\ n\ge n_0)$$

故ニ $\sum U_n(x)$ ハ G' デ一様収斂スル. G' ハ $0<\|x\|<\tau$ ニ含マレル任意ノ Compact set ナル故 $\sum U_n(x)$ ハ $0<\|x\|<\tau$ デ正則トナル. 次ニ空間ノ任意ノ点ヲ y トスル. 正数 ρ ヲ適当ニトレバ $\|\rho y\|<\tau$ トナル.
故ニ $\sum U_n(\rho y)$ ハ収斂スル. 故ニ $\|U_n(\rho y)\|\le M$ $(n=(1,2,\cdots))$ トナル.
複素数 α ヲ $|\alpha|\le\rho-\varepsilon$ (ε ハ十分小ナル正数) トスレバ

$$\|\sum U_n(\alpha y)\| = \|\sum U_n(y)\alpha^n\| \le \sum\|U_n(\rho y)\|\left(\frac{|\alpha|}{\rho}\right)^n$$

ナル故 $\sum U_n(\alpha y)$ ハ $|\alpha|\le\rho-\varepsilon$ デ一様収斂スルカラ α ニツキ正則トナル.

$\sum U_n(x)$ ハ $x=0$ ニ於テ Gateaux ノ微分ヲ有ス。故ニ Zorn ノ定理ニヨリ $\sum U_n(x)$ ハ $\|x\|<\tau$ デ正則デアル. $\|x\|<\tau+\varepsilon$ デハ必ズ不正則点ガ現レル事ハ第一号著者談話デ論ジタノト殆ド同ジダカラ此所デハ省略スル.

乃チ τ ハ正則半径デアル: (以上)

複素数一変数ノ巾級数ニ於テハ一点 z_0 デ収斂スレバ $|z|<|z_0|$ デ収斂スルガ吾々ノ場合ハ之ハ成立シナイ. 例ニ複素2次元空間デ $\sum_{n=0}^{\infty} x y^n$ ハ $x_0=(0,9)$ デ収斂スルガ $x_1=(1,\sqrt{3})$ デハ収斂シナイ.

〔註〕 定理1ニ於テハ $\mu=0$ ナルトキ $\lambda>0$ ナラバ μ ガ正則半径トナルノデ正則半径ヲ決定スルニハ μ λ ヲ同時ニ検ベナケレバナラナイ, λ ヲ検ベズニ μ ダケデ正則半径ヲ決定スルニハ $\mu>0$ ナルトキ常ニ $\lambda>0$ ナル事ガ分レバヨイ. 之ヲ証明スルタメニ簡単ナ Zorn ノ定理ヲノベル.

定理 $p(x)$ ハ i) 常ニ Gateaux ノ微分ガアル. ii) $|\zeta|=1$ ナルトキ $\|p(x)\|=\|p(\zeta x)\|$, iii) x_0 ニ於テ $\|x-x_0\|\le\sigma$ (>0) ナルトキ $\|p(x)\|\le M$, ガ成立スルトキハ、 $\|x\|\le\sigma$ ナルトキ $\|p(x)\|\le M$ トナル.

今 $\mu>0$ トスレバ定理1ノ証明 ii) ヨリ $\|x\|<\mu$ 内ニ一点 x_0 ガ存在シ適当ニ $\sigma(>0)$ ヲトレバ $\|x-x_0\|\le\sigma$ ナルトキ $\|U_n(x)\|\le M$ トナル.
$U_n(x)$ ハ i), ii) ノ條件ヲ満足スル事明ラカナル故 $\|x\|\le\sigma$ ナルトキ
$\|U_n(x)\|\le M$.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\sup_{\|x\|=1}\|U_n(x)\|} = \overline{\lim}\sqrt[n]{\sup_{\|x\|=\sigma}\left\|U_n\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\|} \le \lim \frac{\sqrt[n]{M}}{\sigma} = \frac{1}{\sigma}$$

$\therefore \lambda \ge \sigma > 0$

乃チμ →0 ナレバ常ニ入→0. トナル. 故ニ μ ダケデ正則半径ハ決定出来ル.

（以上）

---

1) M. Zorn : Annals of math. 46

2) 全国紙上数学談話会第一号著者. complex-Banach-spaces ニ於ケル
冪級数ニツイテ ヲ参照.

3) 同上 第三号著者. Complex-Banach-spaces ニ於ケル解析函数
ニツイテ (II) 23頁参照.

4) 同上 第二号著者. Complex-Banach-spaces ニ於ケル解析函数ニツイテ(I)
定理 1. 参照.

5) 2) ニ於ケル正則半径ト比較シテ幾分簡単ニナル.

2) ニ於テハ G ハ $\|x\| \leq 1$ 内ノ compact set トシタガ此所デハ $\|x\| = 1$ 丈
ダケデ考ヘテヨイ.

又 $\tau = 0, \infty$ ノ時モ同様ニ証明セラレル.

(1947. XI 14)