



Title	下半もぢゅ S 群ニツイテ
Author(s)	伊藤, 昇
Citation	全国紙上数学談話会. 1948, 2(7), p. 222-225
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75209
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

74. 下半もちゆ S 群ニツイテ

(名大) 伊藤 昂

群 G の部分群 H のツケル束 $L(H)$ かつ $O. Ore$ は $L(G) = \text{Jordan-Dedekind}$ の連続律が成立シ. カツ主鎖指数が順序ノ意味デーツツタガイニヒトシイヤウナ G ノコトヲ *conformal* トヨビ, ソレニツイテ興味アル研究ヲンテオル. (O. Ore. *Contributions to the Theory of Groups of finite Order* Duke 5. 1939). トコロガ末論ノ方カライエバ G ガ *conformal* ナハ $L(G)$ ガ下半もちゆ S 束デアルト言ウニ等シイ. ソノ意味デ下半もちゆ S 性ヲ基礎ニオイテカシ Ore ノ理論ヲヨリ末論的ニノベテミタイトオモウ.

〔定義〕 $L(G)$ ガ下半もちゆ S 束ナルトキ G ヲ下半もちゆ S 群トイフ.

〔定理 1〕 G ヲ下半もちゆ群 G 反ヲソノ部分群トスル. 反ガ G ノ極大部分群ナラバ 反ノ G ニ対スル指数ハ素数デアル.

〔証明〕 帰納法ニヨル 反ガ G ノ極大部分群ナラバ 反ノ G ニ対スル指数ガ素数

デアルコトヲシメセバヨイ。サテ G が G の唯一ノ極大部分群ナルトキハ G ハ巡回群デ定理ノ成立ハ明白デアルカライマハカンガヘナイ。ソコデスクナクトモニツノアイコトナル極大部分群ガ G ニ存在スルガ $M_1 \neq M_2$ ガ G ノ極大部分群ナラバ下キもち S 性カラ M_1 ハ M_2 ハ M_1 オヨビ M_2 ノ極大部分群。シタガツテ帰納法ノ仮定カラソノ指数ハ素数デアル。イマ、 $M_1 = M_1 \cap M_2 = P_1$, $M_2 = M_1 \cap M_2 = P_2$, $G : M_1 = n_1$, $G : M_2 = n_2$ トオケバ $n_1 P_1 = n_2 P_2$. コノ式カラタダチニ M_1 ヲ G ノ極大部分群, n_1 ソノ指数トスレバ, n_1 ノ素因子ノ個数ハ M_1 ノイカンニカカハラズ一定デアリ。カツ n_1 , n_2 ハ互々一ツノ因子シカコトナラズ。シタガツテ G ガ P -群デアルトイウ自明ノ場合ヲノゾケバ $P \mid n_1$ ナラ $P \mid n_2$ デアルコトヲシル。サマタ G ノ位数ガアイコトナル高々ニツノ素数デシカワレナイトキハ定理ガ成立スルコトハ明白デアルカラ。 G ノ位数ハ少クトモ三個ノアイコトナル素因数ヲ有スルトシテヨイ。ソノトキモシ $G : M_i = P_i P_j \dots$ ナラバ P_i ニ対スル Sylow 群ノ一ツヲ S_i デシメストキ, S_i ヲフクム極大部分群ノ一ツノ M_i ヲトレバ $G : M_i = q P_j \dots$, $q \neq P_i$. S_j ヲフクム極大部分群ノ一ツ M_j ヲトレバ前二者ト比較スルコトニヨリ $G : M_i = P_i r \dots = q S \dots$, $P_i = q$ 等値 以上。

【定理 2】 G ヲ下キもち S 群 G ヲソノ任意ノ部分群, P ヲ G ノ位数ヲフル任意ノ素数トスル。 P ハ指数ガ P デアルヨウナ極大部分群ヲフクム。

【証明】 マツ $q = P_1^{e_1} P_2^{e_2} \dots P_r^{e_r}$, $P_1 > P_2 > \dots > P_r$, $e_i \geq 1$ ($i = 1, 2, \dots, r$) ヲ G ノ位数 q ノ素因子分解トシ, P_i ニ対スル Sylow 群ヲ S_i デシメストキ, $S_1 S_2 \dots S_r$ ($i = 1, 2, \dots, r$) ガ G ノ正規部分群デアルコトヲ証明スル。帰納法ニヨル S_1 ガ G ノ正規部分群デアルコトサエシメセバヨイ。定理 1 カラ容易ニワカルヨウニ G ハ可解群デアルカラアル P_i ニ対シテ指数 P_i ノ正規部分群ヲ有スル。 $i = 1$ ナラ S_1 ハソノ正規, シタガツテ特部分群ダカラ G ノ正規部分群トナル。 $i = 1$ ナルトキモ $e_i > 1$ ナラ上ト同ジ論法デ S_1 ノ極大部分群ガ G ノ正規部分群ニナリ。シタガツテソノ剰余群ヲカンガエレバ S_1 ガ G ノ正規部分群トナル。 $e_i = 1$ ナルトキハ S_2 ガヤハリ上ト同ジ論法デ G ノ正規部分群トナルカラ G/S_2 ヲカンガエレバ $S_1 S_2$ ガ G ノ正規部分群トナル。ココデ $G \supseteq S_1 S_2$ ナラ仮定カラ S_i ガ G ノ正規部分群トナルコトノ逆トマツタク全ノ論法デアルカラ $G = S_1 S_2$ ノ場合ヲカンガエ

ル。トコロガコノ場合ニハ定理2ノ成立ハ自明デ G ハ指数 P_2 ノ極大部分群ヲ有シカツ P_2 ガ最小素因数デアルカラ。ソレハマタ G ノ正規部分群トナル。ソウダトスレバ S_1 ガ G ノ正規部分群トナルコトハ既ニ自明デアラウ。ソコデ定理ノ証明ニハイル。イマ注意シタヨウニ $r \leq 2$ ナラ定理ハアキラカニ真デアルカラ $r \geq 3$ トシテヤル。ソノトキモ帰納法ニヨル。 G ガ指数 P_2 ノ部分群ヲ有スルコトサエ証明スレバヨイ。サテ S_2 ノ G ニイケル正規化群ヲ N_2 トスレバ $G = N_2(S_1 S_2)$ 。何者 G ノ任意ノ元 g ニ對シテ $S_2^g = S_2$, $t \in S_1 S_2$ シタガツテ $gt^{-1} \in N_2$ 。ソウダトスレバ N_2 ノ G ニ對スル指数ハ1又ハ P_1 ハ。コノトキハ G/S_2 デカンガイレバヨク。 P_1 ノ中ナルトキハ N_2 ヲフクム G ノ極大部分群ヲトレバ定理1カラソノ G ニ對スル指数ハ P_1 ニ等シイ。以上。

【定理3】 G ヲ下半もぢゆ S 群トスレバ G ハ主鎖デアルヨウナ主組成列ヲ有スル。ソノ際ニ主鎖指数ハ單調増大デアルトシテヨイ。

【証明】 G ニ位数 P_1 ノ正規部分群が存在スルコトヲシメセバ。アトハ帰納法ニヨリ証明サレル。定理2ニオケルゴトク $(G_1) S_1$ 。マツ S_1 ガアーベる群ナラハ定理2カラ G ハ指数 P_2 ノ部分群ヲ有シ。ソコデハ位数 P_2 ノ正規部分群が存在スルガ。ソレハ同時ニ S_1 ノ正規部。群デモアルカラ G ノ正規部分群トナル。 S_1 ガアーベる群デナケレバ S_1 ノ中心ヲ Z_1 キ1 デシメセバ Z_1 ノナカニ $Z_1 S_2 \dots S_{r-1}$ P_1 ナルゴトキ位数 P_1 ノ部分群が存在スルガ。ソレハマタ同時ニ S_1 ノ正規部分群デアルカラ G ノ正規部分群トナル。 以上。

サテ定理3ノヨウナ性質ヲ有スル群ガ定理1ヲ満足スルコトハ明白デアルカラ下半もぢゆ S 群ニオケル上記三定理ハ同値デアル。ソコデ定理1ノ逆ヲ証明スレバ下半もぢゆ S 群ハソノイツレデモ特徴ゾケラレルコトニナル。

【定理4】 G ヲアル群 G_1, G_2 ヲソノ部分群トスル。 G_1 ガ G_2 ノ極大部分群ナラバ G_1 ノ G_2 ニ對スル指数ガ素数デアルコトガ任意ノ G_1, G_2 ニ對シテイヘルナラバ G ハ下半もぢゆ S 群デアル。

【証明】 G ガ下半もぢゆ S 群デナケレバ $M_1 \cap M_2$ ガ M_1 ノ極大部分群デナイヨウナ G_1 ノ極大部分群 M_1, M_2 ガ存在スル。ソウダトスレバ仮定カラ G_1 $M_1 < M_2$; $M_1 \cap M_2$ 。矛盾。 以上
コノコトカラタチニ

【系】 G が上半もぢゆS群ナラバもぢゆS群デアル。

ナホ定理2カラ容易ニ G ノ任意ノ部分群ヲ H トスルトキ H ハソノアラユル可能ナ位数ニ対シテソノ位数ノ部分群ヲ有スルコトガワカル。コノ逆ニ関シテ O_{n-1} ハ剰余群ニ対スル仮定ガ必要カドウカハ興味アルコトデアリ、マタモシ必要ナラソノヨウナ例ガ構成セラレルダラウトイッテオルガ、ソレハ必要デナイ。シカシ O_{n-1} ガ予想シタヨウナ例モアル。即チ下半もぢゆ群ハツギノ定理ニヨツテモ特徴ツケラレルワケデアル。

【定理5】 G ヲアル群、 H ヲソノ任意ノ部分群トスル、 H ガソノアラユル可能ナ位数ニ対シテソノ位数ノ部分群ヲ有スルナラバ G ハ下半もぢゆ群デアル。

【証明】 モシ定理ノ仮定ヲ満足シテ、シカモ下半もぢゆS群デナイヨウナ群が存在スルナラバ、ソノヨウナ群ノナカデ極小位数ノモノが存在スルハズデアル。ソレヲ H トスル。コノ場合ニモ $S_1 S_2 \dots S_m$ ($n \geq m$, $c_i = 1, 2, m, n$) トナルコトハ明白デアル。サラニ G ニ位数 p_i ノ正規部分群 P_i が存在スルコトモ容易ニワカル。ワレワレハ G/P_i ニ定理5ノ仮定ガ成立スルコトヲシメシテ矛盾ヲダス。ソレニハ定理2ノ結果ガ成立スルコトヲイエバヨイ。 P_i ヲアツクマナイ、 G ノ極大部分群 M が存在スレバ $G/P_i \cong M$ デ後者が下半もぢゆS群デアルカラヨイ。イカナル極大部分群モ P_i ヲ含ムナラバトクニ指数ガ p_i ナル極大部分群モ P_i ヲアツクム。ソウダトスレバ G/P_i モ指数 p_i ノ極大部分群ヲ有スルコトニナル。 以上

【例】 四元数群 Q_8 ノ同型群ハ S_4 ニ同型デアルカラ Q_8 ハ位数3ノ同型対応 σ ヲ有スル、 G ノ上ノ $\{\sigma\}$ ノ *holomorph* ヲ G トスル。 G ノ真部分群ガスベチ下半もぢゆS群デアルコトハ容易ニ検証サレル。シカシ $G/\{\sigma\} \cong O_3$ デカラ G ノ真剰余群ニハ下半もぢゆS群デナイモノが存在スル。

1947. 11. 20