



Title	Directed system ノ cofinal type ニツイテ
Author(s)	白田, 平
Citation	全国紙上数学談話会. 1948, 2(7), p. 231-233
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75211
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

76. Directed system / cofinal type ニツイテ

白田 平

Tukeyハ“convergence and uniformity in topology” (1940)
 テ directed system ニ因シテ取扱ツテキル (Pl4) ガ、ソレニツイテ十分ナ説
 明ガ為サレテキナイ。コ、デハ一般ノ連続体ニ向スル仮定ヲ用ヒテソノ type
 間ノ關係ヲ述ベルコトニスル。尚若明ノ III 及ビ IV ハ大面サソノ考ヘヲソノママ拡大
 シタモノデス。

I [定義] (α, β) ハ α, β ナル順序数 ($\alpha \equiv \beta$) ニ因シテ χ_β ケノ元ヨリナル集
 合ノ χ_α ヨリホナル濃度ヲ有スルスベテノ部分集合ノナス順序ヲ包摂關係ヨリ導イ
 タ directed system / cofinal type ヲ表ハスモノトスル。

コノトキ $(0, \beta)$ ハ χ_β ケノ元ヨリナル集合ノ stack ヲ含ム。且
 $\sigma = \{a \mid \bar{a} < \chi_\alpha \quad a \in W(W_\alpha) = \{\mu \mid \mu < \omega_\alpha\}\}$
 トスルベ (コ、デ $\bar{a}$ ハ a ノ濃ヲ表ハス)

$\sigma' = \{w(\mu) \mid \mu < \omega_\alpha\}$ ハ σ ト similar デ且コレハ $(\alpha, \bar{a})$ ニ合ズ。

ω_α Type / transfinite sequence トナル。

II $(\alpha, \beta) \equiv (\alpha, \beta + \delta) \quad \delta > 0$

$\therefore \sigma = \{a \mid \bar{a} < \chi_\alpha \quad a \in M \quad \bar{M} = \chi_\beta\}$
 $\bar{\sigma} = \{b \mid \bar{b} < \chi_\alpha \quad b \in (M' \setminus M) \quad \bar{M}' = \chi_{\beta+\delta}\}$
 トスル。且 $b(a) = a, \quad a(b) = b \wedge M$ トスルバヨイ。

III $(\alpha, \beta) \neq (\alpha + \delta, \beta + \delta) \quad \delta \geq 0 \quad \delta \neq 0$

$\therefore (\alpha, \beta) \geq (\alpha + \delta, \beta + \delta)$ トスル.

且 $(\alpha, \beta) \neq \sigma = \{a \mid \bar{a} < \chi_\alpha \quad a \in M \quad \bar{M} = \chi_\beta\}$

$(\alpha + \delta, \beta + \delta) \neq \bar{\sigma} = \{b \mid \bar{b} < \chi_{\alpha+\delta} \quad b \in M' \quad \bar{M}' = \chi_{\beta+\delta}\}$

且 $\sigma > \bar{\sigma}$ トスル ($\exists a(b), b(a) (a > a(b) \rightarrow b(a) > b)$)

σ ノ元ヲ列シテ $a_1, a_2, \dots, a_\mu, \dots \quad |\mu| < \omega_\beta$

ナゼナラバ コノ $\alpha < \beta$ ナラバ常ニ $\chi_\beta^{\alpha_2} = \chi_\beta$ ガ成立スルモノトスル.

コレハ β ガ *limitzahl* デナイトキ連続体ノ仮定ヲ用ヒレバ出来ル.

ナゼナラバ $\beta = (\beta - 1) + 1$ 依テ $\chi_\beta = 2^{\chi_{\beta-1}} \therefore \chi_\beta^{\alpha_2} = 2^{\chi_{\beta-1}} \chi_\alpha = 2^{\chi_{\beta-1}}$
 $= \chi_\beta$

次ニ σ ノ元ノ数ハ

$$\chi_\beta + \chi_\beta^2 + \dots + \chi_\beta^{\alpha_\mu} + \dots \quad (\chi_\mu < \chi_\alpha \leq \chi_\beta)$$

$$= \underbrace{\chi_\beta + \chi_\beta + \dots + \chi_\beta}_{\omega_\alpha} = \chi_\beta \quad \chi_\alpha = \chi_\beta$$

サテ $\mathcal{A}_\mu = \{b \mid a(b) = a_\mu\}$ トスルバ $\bar{\sigma} = \bigcup \mathcal{A}_\mu$

且 $\cup \mathcal{A}_\mu = \cup \{b \mid a(b) = a_\mu\}$ トスルバ $\bigcup_i \mathcal{A}_\mu = M'$

$\therefore (\forall \mu) (\bigcup \mathcal{A}_\mu = \chi_{\beta+\delta})$

ナゼナラバ

$(\forall \mu) (\bigcup \mathcal{A}_\mu < \chi_{\beta+\delta})$ トスルバ $(\beta \neq \gamma) (\beta < \gamma < \beta + \delta)$

$(\forall \mu) \bigcup \mathcal{A}_\mu \equiv \chi_\gamma$

コノトキ $\chi_{\beta+\delta} = \bar{M}' = \bigcup_\mu \mathcal{A}_\mu \leq \bigcup_\mu \mathcal{A}_\mu \leq \chi_\beta \cdot \chi_{\gamma'} = \chi_{\gamma'} < \chi_{\beta+\delta}$ 矛盾

コノトキコノ μ ニ因シテ $\mathcal{A}_\mu \ni b \rightarrow a(b) = a_\mu$ デアル

今 $a_\mu < a_\lambda$ トスルバ $b(a_\lambda) > b \quad \therefore b(a_\lambda) \in \bigcup \mathcal{A}_\mu$

然ルニ $\bar{b(a_\lambda)} < \chi_{\alpha+\delta} \quad \bigcup \mathcal{A}_\mu = \chi_{\beta+\delta}$

$\therefore \chi_{\alpha+\delta} > \chi_{\beta+\delta}$ 仮定ヨリ $\alpha + \delta \leq \beta + \delta$ コレハ矛盾スル.

IV $(\alpha, \beta) \geq (\alpha + \delta, \beta) \quad \delta > 0$

$\therefore$ 前節ニヨリ $\alpha < \beta$ ト仮定スルバ $\chi_\beta^{\alpha_2} = \chi_\beta$ トスル. コノトキ前節ト同様ニ

$(\alpha, \beta) \neq \sigma = \{a \mid \bar{a} < \chi_\alpha \quad a \in M \quad \bar{M} = \chi_\beta\}$

$(\alpha + \delta, \beta) \neq \bar{\sigma} = \{b \mid \bar{b} < \chi_{\alpha+\delta}, \quad b \in M' \quad \bar{M}' = \chi_\beta\}$

$$\text{トスルバ } \overline{\alpha} = \overline{\beta} = \alpha_\mu$$

依テ α ノ元ト β ノ元トノ間ニ 1:1 ノ対応 f が存在スル。

$$\text{即チ } f(a) = b$$

$$\text{今 } a(b) = f^{-1}(b)$$

$$b(a_0) = \bigcup \{b \mid b = f(a) \quad a \leq a_0\}$$

$$\text{トスル。コノトキ } \overline{a_0} < \alpha_\alpha \quad \text{依テ } \overline{\{a \mid a \leq a_0\}} \leq 2^{\alpha_\mu} = \alpha_{\mu+1} < \alpha_\alpha$$

$$\text{コノデ } \alpha_\mu = \overline{a_0} \quad \mu < \alpha \text{ トスル。}$$

$$\text{依テ } \overline{b(a_0)} \leq \alpha_\alpha \cdot \alpha_\alpha + \delta \leq \alpha_\alpha + \delta \quad \text{依テ } b(a_0) \in \beta \text{ トナル。}$$

明ラカニコノトキ。

$$a_0 > a(b) \rightarrow b(a_0) > f(a(b)) = b$$

$$\text{V. } (\alpha, \beta) \nless (\alpha + \delta, \delta) \quad \delta > 0 \quad \beta \leq \gamma$$

$\therefore$ 若シ $(\alpha, \beta) < (\alpha + \delta, \delta)$ トスル。

$$(\alpha, \beta) \ni \alpha = \{a \mid \overline{a} < \alpha_\alpha \quad a \in M \quad \overline{M} = \alpha_\beta\}$$

$$(\alpha + \delta, \delta) \ni \beta = \{b \mid \overline{b} < \alpha_\alpha + \delta \quad b \in M' \quad \overline{M'} = \alpha_\delta\}$$

トスル。 $\alpha < \overline{\beta}$ ナルカラ。

$$(\exists a(a) \quad b(a)) \quad (b > b(a) \rightarrow a(b) > a)$$

今 α ハ maximal simple sequence

$$\alpha = \{a_1, a_2, \dots, a_\mu, \dots \mid \mu < \omega_\alpha\} \text{ ナル}$$

ナゼナラバ $\overline{a_\mu} < \alpha_\alpha$ ナルカラ有シ $\mu \geq \omega_\alpha$ ナラバ $\overline{a_\mu} \geq \alpha_\alpha$ トナルカラ

$$\text{今 } b_0 = \bigcup \{b(a_\mu) \mid a_\mu \in \alpha'\} \text{ トスル。}$$

$$\overline{b_0} \leq \alpha_\alpha + \delta \quad \because b_0 \in \beta$$

ナゼナラバ。

$$\overline{b_0} \leq \bigcup_\mu \overline{b(a_\mu)} \leq \alpha_\alpha \cdot \alpha_\alpha + \delta = \alpha_\alpha + \delta$$

然シ b_0 ニ対応スル $a(b_0)$ ハ存在シナイ。

ナゼナラバ

$$a(b_0) = a_0 \text{ トスルバ } a_0 > a_\mu \quad (\forall \mu) \quad \text{依テ } a_0 \in \alpha'$$

$$\therefore (\exists \mu_0) (a_0 = a_{\mu_0} \quad \mu_0 < \mu \text{ トスルバ } a_0 = a_{\mu_0} < a_\mu) \text{ コノハ矛盾}$$

VI 以上ニヨリ 若シ $\alpha < \beta$ ナラバ。

$$\chi_\beta^{\chi_\alpha} = \chi_\beta$$

ノ成立スル ($\alpha \beta$)ニ因シテハ §27ノ表ハ証明サレル。

即チ $\beta < \omega_0$ ナルトキハ右ノ連結体ノ仮定ヲトレバヨイ。

(*)ハ $\beta < \omega_0$ ナルトキ連結体ノ仮定ト *equivalent* デアル。

ナゼナラバ *Tein* ノ定理ニヨリ

$$\beta \text{ が有限ナラバ } \chi_\beta^{\chi_\alpha} = 2^{\chi_\alpha} \chi_\beta$$

依テ若シ ($\exists \alpha$) ($2^{\chi_{\beta-1}} > \chi_\alpha \chi_\beta$) トスレバ

上ノ定理ヨリ

$$\chi_\beta = \chi_\beta^{\chi_{\beta-1}} = 2^{\chi_{\beta-1}} \cdot \chi_\beta = 2^{\chi_{\beta-1}}$$

ハ上ノ仮定ニ反スル。(井関サノニヨル)

依テ、更ニ β が *limit zahl* デナケレバ (又ハ *limit zahl* ヲ呼ケバ)

§2.7ノ表ハ序公理及ビ連結体ノ仮定ヲ用ヒレバ説明サレタコトニナル。

VII 次ニ ($m, n+1$)

$$(m, n) \wedge (m+1, n+1)$$

デアルガ、($m, n+1$) ト (m, n) 及ビ ($m+1, n+1$) トノ向ニ反スル *type* ガ存在スルコトヲ云フ。(勿論 VI デ云ツタ仮定ヲ用ヒテ)

例ヘバ

$$A = \{a \mid \bar{a} \leq \chi_{m-1} \quad a \in M \quad \bar{M} = \chi_n\}$$

$$B = \{b \mid \bar{b} \leq \chi_m \quad b \in M' \quad \bar{M}' = \chi_{n+1}\}$$

$$C = \{c \mid \bar{c} \leq \chi_{m-1} \quad c \in N \quad \bar{N} = \chi_{n+1}\}$$

トスル。コノトキ $A < C$ $B < C$ 依テ $A \times B < C$

$A \times B = A$ トスレバ $A \neq C$ ガ云ヘル。

若シ $A \vee C$ トスレバ

$$(\exists \lambda(c); c(\lambda)) (\lambda = (ab) > A(c) \rightarrow c(\lambda) > c)$$

今 $\Lambda a = \{(a, \beta) \mid \beta \in B \quad a \text{ ハ固定} \}$ トスレバ

$$\overline{\{\Lambda a\}} = \bar{a} = \chi_n \quad \text{且} \quad \bar{C} = \chi_{n+1} = \bar{N}$$

依テ ($\exists a$) ($\{c \mid \Lambda(c) \in \Lambda a \quad \bar{c} = 1\} = \chi_{n+1}$)

シカラザレバ

$$\overline{\Lambda} = \bigcup_{\alpha} \{c \mid \Lambda(c) \in \Lambda_{\alpha}\} = \sum_{\alpha} \{c \mid \Lambda(c) \in \Lambda_{\alpha}\} = X_n \cdot X_n = X_n$$

コレハ矛盾

今カカル α ニ因シテ $\Lambda(c) \in \Lambda_{\alpha}$ ナル c ヲ番号付ケテ

$$c_1, c_2, \dots, c_{\mu}, \dots \quad |\mu < \omega_{n+1}|$$

トスル。且 $c_1, \dots, c_{\mu}, \dots, c_{\omega_m}$ ヲトレバ

$$\overline{\{c_{\mu} \mid \mu \leq \omega_m\}} = X_m$$

且 $\Lambda(c_{\mu}) < \lambda$ トスベテノ $\mu \leq \omega_m$ = 用ヒテナル Λ_{α} ノ元ガ存在スル。ナセ
ナラバ $\overline{\Lambda_{\alpha}} = \delta_{n+1} \cdot X_m$

$$\text{ユノ } c(\lambda) \text{ニ因シテ } c(\lambda) \supset c_{\mu} \quad \mu \leq \omega_m$$

仮テ $c(\lambda) \supset \{c_{\mu} \mid \mu \leq \omega_m\}$ 依テ $\overline{c(\lambda)} \geq X_m$ コレハ矛盾。

Ⅷ 尚 *directed system* ノ *type* ニ因スル二三ノ簡單ナ結果トシテ次ノモノガアル。

1. $(0, \alpha)$ ハ X_{α} ケノ元ヲ有スル *system* ノ 中テ最大ナ *type* デアル。
2. スベテノ *simple sequence* ハ (α, α) *type* ニ含マレル。
3. $(0, 1)$ ハスベテノ α ニ因シテ X_{α} ケノ元ヲ有スル或ル *system* ヲ含ム。
コレガ東ヲ作ルコトノ何モ云ヘテマナイ。

(1947. 12. 10)