



Title	完全準案環ノ根基ニツイテ
Author(s)	豊田, 五浪
Citation	全国紙上数学談話会. 1948, 2(8), p. 245-250
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75218
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

83. 完全準素環ノ根基ニツイテ

身延中学 豊田五浪
(1948. II. 12)

I. 環 M ガ右イデアルニツイテ最小條件、最大條件ヲ満足スルトキハ、 M ノ素イデアルハ巾零ヲ有スルコトハ玉田宏生ニ抽象代数学ヤ 多元数論等ニ書イデアル通りデスガ、並デハ最小條件ノミヲ仮定シテ同様ノ事實ヲ証明シマス。

M_1 ヲ M ノ非巾零右イデアルトスル。

$$M_1 \supseteq M_1^2 \supseteq \dots \supseteq M_1^f \supseteq \dots \quad (\neq 0)$$

カ成立シ、最小條件ニヨリ $M_1^k = M_1^{k+1} = \dots$

$$M_1^k = M_2 \text{ トオケバ } M_2 = M_2^2 = \dots$$

依ツテ $m_2 \in M_2$ ヲ選ベバ、 $M_2 = M_2^2$ ヲリ $m_2 = \sum m_{21} m_{22}, m_{21} \in M_2,$

m_{22} 共にト出来ルカラ、コノ和ノ中少ナリトモ一ツ例ニバ $m_{21} m_{22} \neq 0$

ト考ヘテヨイ。次ニ $m_{22} = \sum m_{32} m_{33}, m_{32}, m_{33} \in M_2$ ト出来 $m_{32} m_{33} \neq$

$\sum m_{21} m_{32} m_{33}$ 前ト同様ニ $m_{21} m_{32} m_{33} \neq 0$ ト出来ル。之ヲ続ケルト

$m_{21} m_{32} m_{33} \dots m_{s1} m_{s2} \dots m_{s+1,1} m_{s+1,2} \dots$ ナル積ヲ0デナイ積ニ出来ル。(Sハ如何程デモ大キク出来マス) 次ニ

$$m_{21} \dots m_{s1} m_{s2} \dots m_{s+1,1} m_{s+1,2} \dots \supseteq \dots \supseteq m_{21} m_{32} \dots m_{s1} m_{s2} \dots m_{s+1,1} m_{s+1,2} \dots M_2 \supseteq \dots (\neq 0)$$

ヲ考ヘマス、 M ノ右イデアルノ如デスカラ素イデアルニヨリ

$$m_{21} \dots m_{s1} m_{s2} \dots m_{s+1,1} m_{s+1,2} \dots = m_{21} \dots m_{s1} m_{s+1,1} M_2$$

$$\therefore m_{21} \dots m_{s1} m_{s+1,1} = m_{21} \dots m_{s1} m_{s+1,1} \chi_1 \quad (\chi_1 \in M_2)$$

改メテ $a_1 = m_{21} \dots m_{s1} m_{s+1,1}$ トオクト $a_1 = a_1 \chi_1$ 即チ

$$a_1 = a_1 \chi_1 = a_1 \chi_1^2 = \dots = a_1 \chi_1^f = \dots \quad (1)$$

同様ニ

$$\chi_1 M_2 \supseteq \chi_1^2 M_2 \supseteq \dots \supseteq \chi_1^f M_2 \supseteq \dots (\neq 0)$$

$$\therefore \chi_1^{k-1} M_2 = \chi_1^f M_2 \quad \chi_1^k = \chi_1^f \chi_2 \quad (\chi_2 \in M_2)$$

以下同シ

$$x_c^{f_1} = x_c^{f_2} x_{c+1} = x_c^{f_3} x_{c+1}^2 = \dots = x_c^{f_n} x_{c+1}^{f_{n+1}} = \dots (x_c \in M_c)$$

次に M_a は $a x = 0$ ($x \in M$) ナル M ノ右乗集合トシマス。 M_a ハ右イデアル。
 デ $M_a \supseteq M_{c_1}^{f_1}$ 何故ナラ (i) ヨリ $x_{c_1}^{f_1} x = 0$ ヨリ $a_1 x = 0$ ガ従ヒマス。

同シテ $M_a \supseteq M_{c_2}^{f_2} \supseteq M_{c_3}^{f_3} \supseteq \dots$

最小条件ニヨリ $M_{x_k}^{f_k} = 0$ 又 $\bar{x}$ へ $M_{x_k}^{f_k} = M_{x_{k+1}}^{f_{k+1}} = \dots$

前者ナラバ $x_k^{f_k} = x_k^{f_k} x_{k+1}^{f_{k+1}} = x_k^{f_k} (x_{k+1}^{f_{k+1}})^2$ ヨリ $x_k^{f_k} (x_{k+1}^{f_{k+1}} - (x_{k+1}^{f_{k+1}})^2) = 0$

即チ $x_{k+1}^{f_{k+1}} = (x_{k+1}^{f_{k+1}})^2$ 故ニ $x_{k+1}^{f_{k+1}}$ 乃中零元。

後者ナラバ $x_k^{f_k} = \alpha_k$, $x_{k+1}^{f_{k+1}} = \alpha_{k+1}$ トオイテ $\alpha_k = \alpha_{k+1} = \alpha_k \alpha_{k+1}^2$

$\alpha_k (\alpha_{k+1} - \alpha_{k+1}^2) = 0$ 故ニ $\alpha_{k+1} - \alpha_{k+1}^2 \in M_{x_k}^{f_k} = M_{x_{k+1}}^{f_{k+1}}$

従ツテ $\alpha_{k+1} (\alpha_{k+1} - \alpha_{k+1}^2) = 0$ $\alpha_{k+1} = \alpha_{k+1}^3$ - 之レヨリ

α_{k+1} 乃中零元。

故ニ

定理 1. $M = 0$ ナテ、右イデアルニツキ最小条件ガ成立スルトキハ非中零右イデアルハ少クとも一ツノ中零元ヲ有ス。

之レヨリ M ノ基底カ存在シテ中零ナルコトガ云々マス、即チ M ノ *Nilideal* ハコノ定理カラ *nilpotent* ニデナクテハナリマセンカラ。スベテノ中零右イデアルノ台乗集合ヲ P トスルト R ハ M ノ *Nilideal* テ M *nilpotent* デナクテハナリマセン。

II. 次に秋田先生ガ数論的事 1935 年ニ *Teilerkettensatz*

Abelscher Kratensatz ト題シテ *regular* ナ可換環 有限体 $\rightarrow$ 約化環ナルコトヲ証明ノテオラレマスガ、コノデハ有限体 $\rightarrow$ 約化環ハ完全主環 (ノ直和) デモヨイコトヲ示シマス。

完主完全可換環ハ主値元ヲ有シ、故ニ R トスルト M/R ガ主値元ヲ有スガ、最初条件ヲ假定シテオキマス。定理 1 ニヨリ P ガ存在スルコトガ出ホマス。依ツテコレカラ M ハ右イデアルニツキ最小条件ノトヲ満足シ、主値元ヲ有シ、 M/P ガ体デアルトシマス。

定理 2. N ガ M ノ最小中零右イデアルナラバ $N = rM$ ($r^2 = 0$)

証. $r \in N$ トスル $rM \neq 0$ ハ右イデアルデ N ガ最小ナルコトヨリ $rM = N$.
 $\wedge N^2 \neq 0$ ナラ $N^2 \subseteq N$ ヨリ, $N^2 = N$. N ガ非中零トナリ, 少ナリト
 モーソノ巾等元ヲ有スルカ M ハ唯一ノ巾等元デアル主單位元 e ヲ有スル
 ノミデアルカラ $M \subseteq N$ 之レ矛盾 故ニ $N^2 = 0$ ナルコトモ分ル.

(Dewring-Algebra 参照)

定理3 M ノ最小巾等右イデアル $N = \text{ツイテハ } NR = 0$

証 $NR \subseteq N$ カラ $NR \neq 0$ トスルト $NR = N$ 即チ $rMR = rM$
 $MR = R$ ナル故 $rR = rM$, $r \in rM$ ヨリ $r \in rR$. 従ツテ $r = rY$
 $(Y \in R)$ 故ニ r ガ巾等元ナル故 之レハ $r \neq 0$ ナル以上不成立,
 故ニ $NR = 0$.

定理4 $N = rM \cong rK$ [K ハ M/R = 同型体]

証. $rR = 0$ カラ $rM \neq 0$ [$m \in R, m \in M$] ヲ云フ, モシ $rM_r = 0$
 トスルト (M ハ $rM = 0$ ナル $x \in M$ ノ元集合) $M_r \supseteq R$ ナル右イデ
 アルデ M_r ガ R = 巾等ナケレバ, 非中零, 従ツテ $e \in M_r$ [定理1]
 故ニ $M \subseteq M_r \therefore M = M_r$. コレカラ $rM = 0$, 之レハ不可能デアル
 カラ, $m \in R$ デナケレバ ($r \neq 0$), 故ニ $ra = ra'$ [$a, a' \in M$] ナラ
 $r(a - a') = 0$, $a - a' \in R$ 故ツテ ra ハ R ヲエトスル M ノ類ニヨリ
 決定サレルカラ, $rM \cong r(M/R)$ ト考ヘラレ, $M/R \cong K$ トスルト,
 $rM \supseteq rK$, K ノ主單位元作用素 E = ツイテハ $rE = r$ ト決メルコト勿論デ
 アル. ツマリ, N ヲ r = 右カル乗ト考ヘデ宜シイ.

定理5. M ノ最小巾等イデアルハ K = 右カル乗トシテ併用同型デアル.

証. 定理4ヨリ明カ.

定理6. M ノスベテノ最小巾等右イデアルノ合併集合 R , ハ M ノイデアルデアル.

証 N ヲ最小巾等右イデアルノ一ツトスルト, mN ($m \in M$) ハ
 0 カ $\wedge$ 0 デナイ, $mN \neq 0$ ノモト mN ハ N = 作用素同型デスカラ mN
 係最小巾等右イデアルトナリ (N ガ最小ナルコトカラ) $mN \subseteq R$, 故
 $= \cup R_i \subseteq R$, $R_i m \subseteq R_i$ ハ勿論デアル.

定理7. $r \in R$ トシ, モシ $rR = 0$ ナラバ rM ハ最小巾等右イデアルデアル.

証. 定理4ノ証明ニアル如ク $rM \neq 0$, $m \in R$ デスカラ $rM = rM'$ ナラバ

$r(m-m')=0$. $m \equiv m' \pmod{R}$ 故 $rM \cong r(M/R) \cong rK$.
 コノ rK が最小デナイトスルト $N_1 = rK$, $r \in N_1$ トシテ, $rK = rK$
 故ニ $r_1 = r$ $rR^{-1} = r$. $\therefore r \in rK = N_1 \therefore N_1 = rM$.

定理 8. N ヲ M ノ最小デナイトスルト $NR = 0$ ナラバ $N \subseteq R_1$.

証. $n \in N$ トシマス $nR = 0$. 故ニ $nM \subseteq M$: 最小デナイトスルト.

(定理 7) $\therefore n \in R_1$. $\therefore N \subseteq R_1$.

定理 9. $\bar{M} = M/R_1$ ノ最小デナイトスルト $\bar{N} = \bar{r}\bar{M}$, 元 $\bar{r}$ (即チ M ノ
 類) ヨリ M ノ元 r ヲトレバ $rR \neq 0$.

証. もし $rR = 0$ ナラバ $r \in R_1$ デ $\bar{r} = 0$. $[0, \bar{M}]$ ノ零 $\bar{r}\bar{M} = 0 =$
 故スル. (M ニ於テ右イデアルニツキ最小条件が成立スルナラバ $\bar{M} = M/R_1$
 ニ於テモ成立スル.)

定理 10. $\bar{M}$ カ根基 $\bar{R}$ ヲ有スルナラバ $\bar{R} = \bar{P}/R_1$ デ $\bar{M}$ ノ最小デナイトスルト
 ノ右乗集合ヲ $\bar{R}_1$ トスルト $\bar{R}_1 = \bar{P}_2/R_1$ デ 且ツ

$$R_2 R \neq 0 \quad R_2 R^2 = 0 \quad [\text{時} = P_2^3 = 0]$$

が成立スル.

証. 定理 9 ヲ参照シテ $\bar{R}$. $\bar{R} = 0$ ヨリ $R_2 R \subseteq R_1$. 故ニ $R_2 R^2 = 0$. 又 $R_2 R = 0$
 ナラバ $R_2 \subseteq R_1$ トナル (定理 8) カラ. $R_2/R_1 = \bar{R}_1 \neq 0$ 反ス. $\therefore R_2 R \neq 0$.
 コノ定理ニヨツテ $\bar{M}$ ニ於テ $\bar{R}$. $\bar{R}_1$ ノ存在ガエハテ $\bar{R}_2 \bar{R} \neq 0$ $\bar{R}_2 \bar{R}^2 = 0$
 カ出マス. 従ツテ $(R_3/R_1)(R/R_1) \neq 0$. ($\bar{R}_2 = R_3/R_1$) 即チ $R_3 R \neq R_1$. 之レ
 ヨリ $R_3 R^2 \neq 0$ トナリマス. 何故ナラ. $R_3 R^2 = 0$ ナラバ $(R_3 R)R = 0 = 0$ ヨリ
 $R_3 R \subseteq R_1$ トナリマスカラ $\bar{R}_2 \bar{R}^2 = 0$ ヨリハ $R_3 R^3 = 0$ ガ出マス. コノ様ニシ
 テ. $R_1 \subset R_2 \subset R_3 \subset \dots \subset R \subset M$

ヲ作ツテ行ケバ.

$$R_i R^{i-1} \neq 0, \quad R_i R^i = 0$$

トナリマスガ $R^i = 0$ $R^{i-1} \neq 0$ トシマス $R_j R^{j-1} = 0$ [$R_j \subseteq R$] ハ

不可能デスカラ $R_{j-1} = R$ デナクテハナリマセン. 即チ

$$R_1 \subset R_2 \subset \dots \subset R_{j-1} = R \subset M. \quad (2)$$

サテ記号的ニ.

ニツイテハ次ノ如ク考ヘマス。

$$\overline{0} \subset R_{11}/R_1 \subset R_{12}/R_1 \subset \cdots \subset R_2/R_1$$

是カエテ $\overline{R}_{11} \subset \overline{R}_{12} \subset \cdots \subset \overline{R}_1$

然ルニ定理IIニヨリコレハ有限ノ鎖ヲ成ラネバナリマセンカラ

$$\overline{R}_{1,k} = \overline{R}_{1,k+1} = \cdots$$

即チ $R_i/R_1 = R_{1,k+1}/R_1 = \cdots$

依ツテ $R_{1,k} = R_{1,k+1} = \cdots [R_{1,k} \subset R_{1,k+1} \text{ ガカラ}]$

従ツテ (3) ハ

$$R_1 \subset R'_{11} \subset R_{12} \subset \cdots \subset R_{1,k} = R_2 \text{ トナリマス}$$

以下同様ニシテ R_i, R_{i+1} ノ間ニ右イデアルノ組成列が存在ノ (2)ヨリ 結局 M ニツイテハ 右イデアルノ組成列ガ少ナクとも一ツ存在シマス。

III. 可換環ノ場合.

M ガ *total nullteiler* ラ有セズ. イデアルニツイテ最小條件ヲ満足スルトキハ (一) 理論ノ意味ニ於テ ノ完全素環ノ直積ニナレコトヲ云ハバ信憑性一 致証明ガ出マス。

大體ノ要領ヲ云ヒマフト。

M ガ *total nullteiler* ラ有セズ 最小條件ヲ満足スルコトヨリ少クとも一ツノ 巾着元 e_i ラ有シ. Peirce ノ分解

$$M = e_1 M + M e_1 \quad [M e_1 \text{ ハ } e_1 x = 0 \quad x \in M \text{ ノ集合}]$$

リシテ $M e_1$ ガ非巾着ナルコトガ *total nullteiler* ノ非存在ヨリ云ヘマス。

依ツテ $e_2 \in M e_1$ ガアリ 結局

$$M = e_1 M + \cdots + e_k M$$

$$e = e_1 + e_2 + \cdots + e_k$$

e_i ハ M ノ主單位元トナリマス. e ガ最早 $e_i = e' + e''$ ($e', e'' = 0$) ノ如ク巾着元ノ和ニ分解不可能ナラバ $e_i M$ ハ 完全素環ニナリ $e_i M$ ニ於テモ 最小條件ガ成立シテ居リマス. 依ツテ前節ノ理論ハ成立シマス。