



Title	多変数解析関数について I -- Bergmann の問題
Author(s)	吉田, 紀雄
Citation	全国紙上数学談話会. 1948, 2(8), p. 255-259
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75221
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

86. 多変数解析函数について

1. Bergmann の問題

吉田 紀雄

(1932. 正. 16)

n 個の変数 $z_1, z_2, \dots, z_n$ の空間を考へ、 L をこの空間の一部分とする。 L に零点の分布(?) を任意に而かも 近似的 に与へたとき、 L に於て正則で且丁度(?) の零点を持つ函数を有する問題を Cousin の第二問題と云ふ。任意の何れかの零点の分布を考へても、求める函数が常に存在するとき L に於て Cousin の第二問題が解けると、 L は又は第二 Cousin 域であると言はれる。一変数の空間に於ては Weierstrass の定理が知られてゐる如く、 L の領域が第二 Cousin 域である。何れ変数の数が2つ以上になると、第二 Cousin 域は非常に制約を受ける、或る領域が第一 Cousin 域であるための必要條件は既に十分条件は Cousin (1893) 以来多くの人が特に Gronwall, H. Cartan, K. Oka, K. Stein 等によつて研究され、多変数函数論に於て最も重要な問題の一つとなつてゐる。

さてこの Cousin の問題に於けるやうに零点の分布を 近似的 に与へては与へられず零点を丁度零点として持つやうな函数は必ずしも存在しないので、S. Bergmann は零点の与へるを 全局的 にした場合、何れなる条件の下に求める函数が常に存在するかと云ふ問題を考へた。次に問題を具体的に説明しよう。

$g(z_1, z_2, \dots, z_n)$ を既成の L に於て恒等的には零でない正則函数とし、且つくとも一つ零点を持つとする。 L に於て正則な (或は有理型な) 函数 $F(z_1, z_2, \dots, z_n)$ が L 内に於る g の A での本意に於て、少くとも g と同じ order で零となると F は g を零点函数として持つと云ふことにする。茲に F が g の A の零

点 P に於て少くとも g と同じ n 個の正則点となることを示すのは、 P が必ず下の正則点か不定点かであつて、且正則点である場合には F/g が P に於て正則なることを示す。そこで *Bergman* は次の問題を考へた。

« L に於て正則な函数 $g_m (m=1, 2, \dots)$ を任意に与へたとき、 L に於て正則 (又は有理型) かつ g_m を n 度零点函数としてある函数 f は如何なる條件の許に常に存在するか »

勿論 函数 f が存在するためには、零函数 $g_m = 0 (m=1, 2, \dots)$ は必ずしも如何なる L に適用してもいけなない。それ故我々は此の條件はいつも満たされてゐるものとして議論を進めて行つて、 f が $g_m (m=1, 2, \dots)$ を n 度零点函数として持つことを示すのは f が $g_m (m=1, 2, \dots)$ の零点以外には決して平点を持たず、且 P を g_m の任意の零点とすると P は f の正則点か不定点である場合には P を零点とする g_m の全部を $g_{m_1}, g_{m_2}, \dots, g_{m_r}$ 一列に包みこむことができる」とすると、

$$\frac{f}{g_{m_1} \cdot g_{m_2} \cdots g_{m_r}}$$

が P に於て正則であつて且 0 でないことを示す。

以上説明した如く *Couder* の第二問題と *Bergman* の問題は共に与へられた零点を持つ函数を求める問題であるが 只その零点の与へ方が異なるのみである。問題の重要性から云ふと *Bergman* の問題はつまらない、*Couder* ののは比較にならぬ。

Bergman は二変数 Z_1, Z_2 の空間でこの問題を考へ、この點等が解けたあつた一つの十分條件を出してゐるが その條件は複雑で 問題の本質を衝いてゐない。然し *Behnke-Thullen*²⁾ はその結果を出してゐる。

(A) 与へられた零点を持つ有理型函数は常に存在する。

(B) L が *Poincaré* 域ならば 求める正則函数も存在する。

(C), L に次の二つの條件を満足する部分領域の列 $L_1, L_2, \dots, L_n, \dots$ が存在するならば 与へられた零点を持つ正則函数も存在する。

$$(i) L_m \subset L_{m+1} \subset L \quad \text{and} \quad L_m \cap L_{m+1} = \emptyset$$

(ii) L_m に於て正則な函数は、 L に於て正則な函数を項とし且 L_m に於て一様收斂をする級数に展開出来る。

この結果に就て見て行かう。先づ (A) は次のやうな無限乗積

$$\prod \left(1 - \frac{1}{C_m g_{m+1}}\right)$$

を算ることによつて能率に得られる。茲に C_m はこの無限乗積の収束の一様性を確保する ために十分大きく 且平面 $g_m = 0$ と極面 $C_m g_{m+1} = 0$ ($m=1, 2, \dots$) が一致しないやうに 之れはよい。次に (E) を見よう。ふ が *Poincaré* 域とは $\mathcal{D}$ に於て有理型な任意の函数が $\mathcal{D}$ に於て正則な且互に素な二つの函数の商として表はされることを云ふ。如何なる域が *Poincaré* 域であるかと云ふ問題は *Bergmann* のこの問題よりももつと非常に重要な且複雑な問題であつて 未だ十分に分つてゐないから (B) はつまらない。さて (C) であるが 条件 (ii) が大変である上に *Behnke-Thullen* の証明は $\mathcal{D}_m$ に限局的に重連結であるといふ条件を課さなければ正しくない。そこで条件 (ii) が如何なるとき成されるかを考えるに、先づ $\mathcal{D}$ が 單葉且有理な正則域であるときには必ず言される。即ち

(A) $\mathcal{D}$ が單葉な且無限遠点を含まない正則域

で且 (F) 次のやうな部分領域の列 $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \dots, \mathcal{D}_n, \dots$

$\mathcal{D}_m$: 終局的な重連結

$$\mathcal{D}_m \subset \mathcal{D}, \lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{D}_m = \mathcal{D}$$

が存在するとき、求める函数は必ず存在することゝ証明しよう。

正数 P を十分大きくして *Polyzylinder*

$$\mathcal{Z} : |Z_v| < P, (v=1, 2, \dots, n)$$

が $\mathcal{D}_m$ を全く内に包みこみ、 $\mathcal{Z}$ と $\mathcal{D}_m$ の *Durchschnitt* を $\mathcal{D}$ とする。 $\mathcal{D}$ に於て正則な函数全部の集まりを $\mathcal{O}$ とすると、 $\mathcal{D}$ は *Cartan-Thullen* の定理に依り *H-Kern* である。従つて $\mathcal{D}$ の函数 $f_1, \dots, f_n$ を適宜にとつて 開集合

$$\mathcal{D}_m^* : |f_v| < 1 \quad (v=1, 2, \dots, n)$$

を作り $\mathcal{D}_m \subset \mathcal{D}_m^* \subset \mathcal{D}$

ならしめることが出来る。

ここで我々は $\mathcal{D}_m \subset \mathcal{D}_m^* \subset \mathcal{D}_{m+1}$ ($m=1, 2, \dots$) なる関係が成立するしよう、もしそうでないときは $\mathcal{D}_m$ の適当な部分列をとればよいから。

次に δ_2 に零点を持つ函数 g_m の個数は有限であるからその積を G_1 とし、
 δ_{m+2} に零点を持ち且 δ_{m+1} に零点を持たない g_m の 個数は有限であるから、その全部の積を G_{m+1} とする。

G_{m+1} は δ_{m+1} で零点を持たず且 δ_{m+1} は仮定に依り線的に單連結であるから $\log G_{m+1}$ は δ_{m+1} で一様正則従つて δ_m^* に於てもそうである。そこで $(n + u_m)$ 個の複素数 $(Z_1, \dots, Z_n, W_1, \dots, W_{u_m})$ の空間において閉図有画

$$f_m: W_v = f_v^{(m)}(Z_1, \dots, Z_n) \quad v=1, \dots, u_m \\ (Z_1, \dots, Z_n) \in \delta_m^*$$

を作り $\log G_{m+1}$ を $(n + u_m)$ 個の変数 (Z, W) の函数と考へると 此は f_m の近傍で正則である。K. Oka³⁾ の正則域に因する基本定理に依ると f_m は *polynomherreich* の依り外部より近似することが出来る。従つて f_m を含む *polynomherreich* ρ_m を f_m に十分近くとると、 $\log G_{m+1}$ は ρ_m で正則である。A. Weil 及び K. Oka⁴⁾ に依り *Polynomherreich* に於て正則な函数はそこにて任意に一様収斂する多項式を項とする級数に展開出来るから、 $\log G_{m+1}$ は ρ_m で、

$Z_1, \dots, Z_n, W_1, \dots, W_{u_m}$ の多項式 η 級数に展開出来る。この級数に於て、

$$W_v = f_v^{(m)}(Z_1, \dots, Z_n), \quad (v=1, \dots, u_m)$$

とおくと、 $\log G_{m+1}$ は δ_m^* に於て一様収斂する級数に展開されることが分る。而かもこの級数の項は $Z_1, \dots, Z_n$ 及び $f_v^{(m)} (v=1, \dots, u_m)$ の多項式である。

この級数の部分和 ψ_{m+1} を適当にとり、

$$\log G_{m+1} = \psi_{m+1} + R_{m+1}$$

としたとき δ_m^* に於て $|R_{m+1}| < \frac{1}{2}$

ならしめる。こゝに於て 無限乗積

$$\prod_{m=1}^{\infty} G_m \cdot e^{-\psi_m} \quad (\psi_i \equiv 1)$$

を作るとこれは δ_1 に於て正則且 $f_m (m=1, 2, \dots)$ を T 度零点函数としてゐる。

振り返つて条件 $\alpha), \beta)$ を考へて見るに、先づ条件 $\beta)$ は甚だ面白くない。これは求める函数を無限乗積で表はさうと云ふ自然ではあるが *primitive* な証明法の要である。条件 $\alpha)$ も問題であるが、こゝでは *Behnke-Thullen* の証明の不備を指摘するに止める。

1) Über die Nullstellei e. Funkt. von zwei kompl. Veränder.

Proc. Koninkl. Akad. v. Wetensch. Amsterdam Bl. 35.

(1932)

2) Über die Verallgemeinerung des Weierstrassschen Produktsatzes

Math. Ann. Bd. 109 (1932)

3) Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables

II - Lemmes d'holomorphie

Tournai of Hiroshima Univ. (1937)

4)

1. Lemmes connexes par rapport aux fonctions rationnelles.

Journal of Hiroshima Univ. (1938)

(9. 2. 48)