



Title	天秤デ球ヲ見分ケル問題ニツイテ
Author(s)	永田, 雅宣
Citation	全国紙上数学談話会. 1948, 2(8), p. 259-263
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75222
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

87. 天秤デ球ヲ見分ケル問題ニツイテ

(名大理学部数学科学生) 永田 稚 宣 (1948.11.19)

" 2^n 個ノ球ノウチニ重サノ異ナル球ガ唯一面アル。(重イカ輕イカワカツテ居ナイ)
コノトキコノ球ノイツカツツヲテ秤ニサセテ重サノ異ナルモノヲ見出ス。テ秤ノ
操作ノ回数 R ト球ノ数 n ノ関係ヲオムル事"

トイフノガ モトモトノ問題デアル。コノ問題ト同時ニコノ問題ヲ多少変更シテモ
ノヲ考察スル。

記号及ビ用語ニツイテ及ノコトヲ約束スル。

(1) $\frac{n}{2} \leq R$ ナル自然数 R ノ最小ヲ $(\frac{n}{2})$ デ表ハス。

(2) 球ノ組ニツイテ用語。記号ヲ集合ト同ジニ用クル。

(ハ) 一ツノ組 A ノ内ニハ 重イモノハナイガ輕イモノガアルカモ知レズ。但ノ組 B
ノウチニハ 重イモノハナイガ 重イモノガアルカモ知レヌト イフトキ。 $A < B$ デ表ハス。
此等スレバ $A+B$ トニ 個数ノ差ガアレバ正常ナルモノヲ加ヘテ同数トシ天秤ニカ
ケレバ A ヲ含ム組ガ輕イコトヲ表ハス。

(ニ) $A < B$ ガアツタトキ。 $A+B$ ニ含マレテ居ル球ハ断ラナイ限リ スベテ正常カ異

常力カラナイモノバカリデアルトスル。

(ホ) A ノ含ム球ノ個数ヲ $\overline{A}$ デ表ハス。

§1. 不等式カラ出テ異常ノ球ヲ見出し得ル回数ニツイテ。

(1) $A < B$ ガ與ヘラレタトキ、コレガアト 何回デ異常ノ球ヲ見出サレルトスレバ、イカニ正常ノ球ノ用意ガアツタトシテモ $X \equiv \overline{A+B} \leq 3^k$ ヲ要スル。

(1.2) 即ニ正常ノ球 1 個ノ用意ガアルトキ $X \equiv \overline{A+B} \leq 3^k$ ナラバ、アト何回デ必ズ異常ノ球ヲ見出し得ル。

コノニツテ証明スル爲ニ先ヅ補題ヲ準備スル。

【補題】

今 $A < B$ トスル、 $\begin{cases} A = A_1 + A_2 + A_3 \text{ (直和)} \\ B = B_1 + B_2 + B_3 \end{cases}$ トシテ $A_1 + B_2 + A_2 + B_1$ ト B_3

コノ際正常ノ球ヲ加ヘルカモシレナイ。然ラバ 明ラカニ

(1) $A_1 + B_2 < A_2 + B_1$ ナラバ、 $A_1 < B_1$

(2) $A_1 + B_2 > A_2 + B_1$ ナラバ $A_2 < B_2$

(3) $A_1 + B_2 = A_2 + B_1$ ナラバ $A_3 < B_3$

【(1.1)ノ証明】

上ノ補題ノヤウニシテ比ベテ思ル。今 $A_i < B_i$ ガ得ラレタ時、モシ $\overline{A_i+B_i} = 1$ ナラバ不明ノ球が見出サレルコトニナルガ。サモナケレバ $A_i + B_i$ ノ球ハ相変ラズ不明デアリ、ソノ何ノ球ハスベテ正常デアルコトガ分ル。

$$\overline{A_1+B_1} + \overline{A_2+B_2} + \overline{A_3+B_3} = \overline{A+B} = X$$

ナル故ニ (1), (2), (3) ノ場合ノ中何レカニオイテハ、

$$\overline{A_i+B_i} \geq \left(\frac{X}{3}\right)$$

トナル。ヨツテ $X > 3^k$ ナラバ 何回デ見出サレナイ 場合ガ起リ得ル。故ニ $X \leq 3^k$ ナルヲ要スル。

【(1.2)ノ証明】

上ノ補題ニ於テ $\overline{A_i+B_i} \leq \left(\frac{X}{3}\right)$ ($i=1, 2, 3$) ガ得ラレルヤツニ分割出来レバヨイ。但シ正常トワカツテ耳ル球ハ高ク 1 個シカ用ナイコトニスル。ソレニハ A ヲミツノ組 X_1, X_2, X_3 ニ分ケテ $\overline{A} \equiv 0 \pmod{3}$ ナラバ X_1, X_2, X_3

ヲ $\overline{A}/3$ 個ツツニスル. $\overline{A} \equiv i \pmod{3}$ ナラバ

$$\overline{X}_1 = \left(\frac{\overline{A}}{3}\right) \equiv \frac{\overline{A}+2}{3}, \quad \overline{X}_2 = \overline{X}_3 = \left(\frac{\overline{A}}{3}\right) - 1 = \frac{\overline{A}-1}{3}$$

トシ. $\overline{A} \equiv 2 \pmod{3}$ ナラバ

$$\overline{X}_1 = \overline{X}_2 = \left(\frac{\overline{A}}{3}\right) = \frac{\overline{A}+1}{3}, \quad \overline{X}_3 = \left(\frac{\overline{A}}{3}\right) - 1 = \frac{\overline{A}-2}{3}$$

トスル. B = ツイテモ同様 Y_1, Y_2, Y_3 = 分ケル. 明カニ $\overline{X}_1 \geq \overline{X}_2 \geq \overline{X}_3$, $\overline{Y}_1 \geq \overline{Y}_2 \geq \overline{Y}_3$ デアル. イツレモツツトモ一回ハ等号ガ成立スル.

(イ) $\overline{X}_1 = \overline{X}_2 = \overline{X}_3$ ヌハ. $\overline{Y}_1 = \overline{Y}_2 = \overline{Y}_3$ ノツクモ一方ガ成立スレバ 補題ノ $A_1, A_2, A_3; B_1, B_2, B_3$ ヲ夫々 $X_1, X_2, X_3; Y_1, Y_2, Y_3$ トスレバヨイ.

(ロ) $\overline{X}_1 > \overline{X}_2 = \overline{X}_3$ $\overline{Y}_1 > \overline{Y}_2 = \overline{Y}_3$ ナル時. 補題ノ $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ ヲ夫々 $X_1, X_2, X_3; Y_3, Y_2, Y_1$ トオイテ見レバヨイ.

(ハ) $\overline{X}_1 = \overline{X}_2 > \overline{X}_3$, $\overline{Y}_1 = \overline{Y}_2 > \overline{Y}_3$ ノトキ. $A_1, A_2, A_3; B_1, B_2, B_3$ ヲ夫々 $X_1, X_2, X_3; Y_1, Y_2, Y_3$ トスル.

(ニ) $\overline{X}_1 > \overline{X}_2 = \overline{X}_3$ } ヌハ $\overline{X}_1 = \overline{X}_2 > \overline{X}_3$ } ナルトキ $A_1, A_2, A_3; B_1,$
 $\overline{Y}_1 = \overline{Y}_2 > \overline{Y}_3$ } $\overline{Y}_1 > \overline{Y}_2 = \overline{Y}_3$ }

B_2, B_3 ヲ夫々 $X_1, X_2, X_3; Y_3, Y_2, Y_1$ トスル.

コレデ全部ノ場合ヲ書シタルトニナルガ. 何レノ場合ニモ個数ノ不揃ハ悉ク個デアルカラ ツケ加ヘルベキ正常ノ球ハ悉ク一個デヨイ.

§2. 正常トカツテ居ル球ヲ用キテヨイ立場ニ於ケル遊メノ問題ノ考察

(2.1) 正常トワカツテ居ル球ガイクラ用意シテアツテモ k 個デ見出スタメニハ $\ell \leq \frac{3k+1}{2}$ ナルコトヲ要スル.

(2.2) 迄ニ一個正常ノ球ノ用意ガアレバ $\ell \leq \frac{3k+1}{2}$ ナラバ十分デアル.

[(2.1)ノ証明]

最初ノ操作ニヨツテ一ツノ不等式ガ得ラレレバツレガ $k-1$ 回デ出来ナクテハナラナイ. ヨツテ天秤ニノセル球ノ個数 X ハ (1.1) = ヨリ $X \leq 3k-1$ デアル.

天秤ガ釣合ツタトキニハ残シタル球カラ $k-1$ 回デ見出し得ナクテハナラナイカラ残ス個数ハ $k-1$ 回デ見出し得ル個数デナクテハナラナイ.
 1回デ見出し得ルノハ 2個以内ノトキデアルカラ

$$\ell \leq 3^{k-1} + 3^{k-2} + \dots + 3 + 2 = \frac{3^{k+1}}{2}$$

ナルコトヲ要スル。

[(2.2) 証明]

(1.2)ノ結果ヲ考ヘレバ上ノ証明ヲ現ハレタ個数デ十分デアルコトハ明ラカデアル。(勿論コノ結果、異常ノ球ガ特ニ重イカ軽イカガ判定出来ルワケデハナイ)

§3 始メノ問題ノ考察

" $\ell \leq \frac{3^{k-1}}{2}$ ガ必要且十分デアル。

最初ハカル個数 χ ハ $\chi = 3^{k-1}$ (=奇数)トスルコト正常ノ球ノ用電ガナイカラ出来ナイ。従ツテ $\chi \leq 3^{k-1}-1$ トシナケレバナラナイ。ヨツテ(2.1)=ヨリ $\ell \leq \frac{3^{k+1}}{2}-1 = \frac{3^{k-1}}{2}$ ナルコトヲ要ス。

次ニ $\ell \leq \frac{3^{k-1}}{2}$ ナラバ χ ハ $3^{k-1}-1$ 以下デ偶数アルゴトクトリ

$\int 1 \equiv \ell - \chi \leq \frac{3^{k-1}+1}{2}$ トスルコトハ可能デアル。

第一回=不等式ガ得ラレレバ残シタモノハ正常デアルカラコレヲ用テ見出スコトガ出来ル。

第一回=釣合ヘバソレハ正常ノ球バカリトイフコトガワカルカラ $\frac{3^{k-1}+1}{3}$ 個以内ノ残シタモノカラ見出サレタ正常ノ球ヲ用ヒテ、異常ノ球ヲ見出スコトガ出来ル

§4. 変形サレタニツノ問題=ツイテ。

(1)"始メノ問題=於テ異常ノ球ガ果ンテ重カツタカ軽カツタカヲ確認セヨ"トイフノニスルト次ノコトガ言ヒ得ル。

" $\ell \leq \frac{3^k-3}{2}$ ガ必要且十分デアル"

(証明) 不等式ガ得ラレテ見出シクトキニハ明ラカニ重カツタカ軽カツタガ確認出来ル。従ツテ残ス個数ノミガ問題ニナル。前ニハ順次天秤ガ釣合ツテキタトキニハ最後ノ一歩手前デ2個残シテヨカツタ。然ルニソレデハ此ノトキ爾後ニモ釣合ツタトキニハ残シタ1個ハ異常デアルコトハワカツテモ重カツタカ軽カツタカノ確認ハ出来ナイ。シカシ最後ノ一歩手前デ1個残スダケナラバ最後ニ残ラナイカラ重カツタカ軽カツタカノ確認ガ出来ル。

ヨツテ前ヨリ1個少イコトが必要且十分デアル。

(2) " ℓ 個ノ球ガアツテソノウチニ ℓ ヶノ異ナルモノハアツタトシテモ高ク一
個デアルトイフ。コノトキコノ ℓ 個ヲサニヨル判別スルノニ前ト同様ナ場
作ニヨツテ行フトスル場合ノ回数 ℓ ト ℓ トノ関係ヲ求ム"

トイフノヲ考ヘテ見ル

コノトキモ一旦不等式ヲ図ラレバ全ク前ト同様デアル、ヨツテ(1)ト同
様 $\ell \leq \frac{3^{\ell}-3}{2}$ が必要十分デアル。

[附記]

始めノ問題ニ於テ異常ノ球ノ重イカ輕イカノ始めカラ分ツテサルトシタト
キ問題トコノ問題トノ関係ニツイテ一言シテ、キマス。

コノトキハ直ぐ容易ニ分ルヤウニ " $\ell \leq 3^{\ell}-3$ " デアリマスガ、コレハ球全
部ノ集合ヲAトスルトキA>空集合又ハA<空集合ガ始めカラ与ヘラレタ持
別ノ場合トシテ考ヘルコトガ出来ル。ソシテ此ノトキ1個モ正常ノ球ガ牌ヘ
ラレテ4ナフデモ十分ナルコトハ(2,2)ノ証明ニ次デABノ分割何レニ於テ
モ少クとも1ヶ所等号ガ成立スルカラ。シイ個数ノ球ヲ重サヲ述ベレバヨ
イトイフコトニヨル。

—以上—