



Title	多價群の正則表現に就いて
Author(s)	内海, 勇蔵
Citation	全国紙上数学談話会. 1948, 2(9), p. 266-268
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75224
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

90 多價群の正則表現に就いて

阪大学生 内海 勇藏

(1948. II. 24)

群を其の部分群で例へば左分解した時、出来た剰余類の同元の意味を素直に定義しますと、其等の殆ど全体は群の普通の公理から積の一貫性を要求だけを除いた公理を満足する所謂多價群を作りますが、斯かる方法で得られる多價群を Krasner は従つて多價群とよぶことにしますと、一般な多價群が多價群となる爲の條件を多價群の言葉で述べておくことは、多價群論と群論とを結び付ける上から甚だ的である様に思はれますが、Eaton が此の所謂 *cogroup* の公理を必要條件として挙げてゐる以外には、Krasner 等も未成功の様に見えます。茲では丁度 Baer が環群に就いてやつたと全様なやり方で Cayley の定理 (群の正則表現に同する) を多價群の場合に拡張することにより、條件の一つの形を導たいと思ひます。

群 G の部分群 H_i が G の自明でない正規部分群を含まないとして、 G の H_i による左分解による多價群 $\mathcal{G}$ を $\mathcal{G}$ とし、 G の H_i による可逆表現 $\begin{pmatrix} x_{ij} \\ y_{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{ij} \\ y_{ij} \end{pmatrix}$ に對應する $\mathcal{G}$ の元 $(\begin{smallmatrix} m_i \\ m_p \end{smallmatrix}) \in \mathcal{G}$ の全体を $\mathcal{M}$ とおき、 $\mathcal{G}$ の元 $(\begin{smallmatrix} m_i \\ m_p \end{smallmatrix})$ 及び $(\begin{smallmatrix} m_j \\ m_q \end{smallmatrix})$ に對するものの全体を $\mathcal{M}_{ij}$ と置けば、 $\mathcal{M}$ は明かに

$$(1) \quad \varphi \in \mathcal{G}, \quad m_i < m_j, m_k \rightarrow m_i^\varphi < m_j, m_k^\varphi$$

$$(2) \quad m_i < m_j, m_k \rightarrow \exists \varphi \in \mathcal{G} : m_i^\varphi = m_k$$

なる 2 性質をもち、勿論 $\mathcal{G} \cong \mathcal{M}$ 、全に對應 $\mathcal{G} \cong \mathcal{M}$ 、従つて (左分解) $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ と

$\mathcal{W}/\mathcal{W}_0$ (多価群として) ですが、逆に多価群 $\mathcal{M}$ の元の写像全体の作る群 $\mathcal{W}$ の部分群 $\mathcal{W}_i$ (1), (2) を満足するものをとれば $\mathcal{W}/\mathcal{W}_0 \cong \mathcal{M}$ で、 $\mathcal{W}_0$ は $\mathcal{W}$ の正規部分群を含まない事を容易に知ります。即ち $m_i \in m_j$ 且 (2) を用いて $\exists \varphi \in \mathcal{W}_i$, $\therefore \mathcal{W}_i \neq \phi$.

今 $\mathcal{W}_i$ と m_i を対応させれば $\mathcal{W}_i \mathcal{W}_j \supset \mathcal{W}_k$ の時 $\exists \varphi_i, \varphi_j = \varphi_k (\varphi_v \in \mathcal{W}_v)$ で $m_k = e \varphi_k = e \varphi_i \varphi_j = m_i \varphi_j \subset m_j e \varphi_j (\because m_i \subset m_i e) = m_i m_j$ ですが逆に $m_i m_j \supset m_k$ ならば (2) から $\exists \varphi_j \in \mathcal{W}_j : m_i \varphi_j = m_k$ ですから $e \mathcal{W}_i \varphi_j = m_i \varphi_j = m_k$, $\mathcal{W}_i \varphi_j \subset \mathcal{W}_k$, $\mathcal{W}_i \mathcal{W}_j \supset \mathcal{W}_k$ です。

この多価群 $\mathcal{M}$ の $\mathcal{W}$ による表現 ρ の性質が後述として次の如き定義が可能になります。
定義 集合 $\mathcal{M}$ 上の関係 $m m' = \{m''\}$ が、あらゆる $\mathcal{M}$ の2元 m, m' に対し

$$\{m\} \neq \phi \text{ なる如く與へられてゐる。}$$

$$(3) \quad \exists e \in \mathcal{M} : m e \supset m \subset m e. (\forall m \in \mathcal{M})$$

$$(4) \quad c \subset a b, a \neq e \text{ なる世に } \exists \text{元 } a, b, c \text{ に対し } \mathcal{M} \text{ の } \mathcal{M} \text{ の上の一々對應 } \varphi \text{ で } m \varphi \subset m b (\forall m \in \mathcal{M}), a \varphi = c$$

$$m_i m_j \supset m_k \iff m_i m_j \varphi \supset m_k \varphi \quad (5)$$

を満足するものが有る。

なる2條件が満足されてゐる時 $\mathcal{M}$ を多価群 $\mathcal{D}$ と云ふ。

... 1. $\{x\} \subset \{y\} \iff \exists a \text{ ならば } m_i/m_j = m_i \varphi / m_j \varphi (\forall m_i, m_j \in \mathcal{M})$ とも書けます。

実は上の証明では $\mathcal{W}$ の條件 (1), (2) を次の

$$(1) \quad m_i \subset m_j \text{ 且 } \varphi \in \mathcal{W} \rightarrow m_i \varphi \subset m_j \varphi$$

及 (2) の形でしか使つて居ませんが (1) を否定する φ の全体 $\mathcal{W}$ は勿論群をなすと。勿論、多価群として (1) を満足する φ の全体 $\mathcal{W}$ が Δ の最大部分群になつてゐる訳です。

条件 (4) は幾つかのより厳しい條件に分解される可きものと見られますが、今の研究成果を持ち合はせませんので當分の指示を偶度、後面をかりた譯けであります。尚 cogroup が多価群 $\mathcal{D}$ であるかどうか、あると云ふ Eaton の予想は正しいと

思はれますが之も未解決の問題です。

多様群 D の部分群 E に於ける上述の正規表現に於て A は E の部分群ですが、 $A \cap E$ は A の正規部分群で、とれば e を固定する E の元の全体と一致します。群 D の 2 元 a, b を $a \in E$ なる時に (E 上に於て) e と共轭といへば、 e と共轭なる元を一括して得られるものの全体は再び多様群 E となりますが、 E の各型素域の中 A の元から惹き起こされるものの全体が丁度 $A \cap E$ の型素域です。 E の Σ^k に於ける正規化群を N_E とかけば、 E の各型素域 α から惹き起こされる A の元 x の全体は即ち $A \cap N_E$ で $a' = x^{-1} a x$.

Eaton は別の論文である多項式の行列による正規表現に頼って居りますが、其處で行列の係数は *Bool* 束、行列間の乘法は通常の定義に於ける $+$, $\cdot$ をし、 $\cap$ で置き換へた形で定義されてゐる様です。Dresher-Ore では係数を整数にとつて居りますが、あれでは彼等の意味の多項式を表現するのには具合が悪いのではないでせうか。尤も *Wall* の意味の多項式ならば差支へない訳です。*Eaton* の正規表現で係数として現れる *Bool* 束の元は 1 と 0 だけですが、 2 元束 B を基礎にとつた行列は寧ろ多項式の別の、即ちば多項式 D の左行列表現の正規化群に含まれる正規元 λ の全体が上包となることを知ります。

引用文献

M. Krasner Duke M.J. 6: 120-40 (1940)
J.E. Eaton Duke M.J. 6, 101-7 (1940)
M. Krasner C.R. Acad. Paris 218. 542-4 (1944)
① Math. Rev. (1945) に於ける紹介 (D.C. Murdoch)
R. Buer. S.B. Heidelberg Akad. (4) (1928)
J.E. Eaton. Amer. J. 62: 222-32 (1940)
M. Oreshter and O. Ore, Amer J. 60 705-33.
(1938)
H.S. Wall. Amer. J. 59. 77-98 (1937)
以上