



Title	Hellyノ定理ノ擴張
Author(s)	山辺, 英彦
Citation	全国紙上数学談話会. 1948, 2(9), p. 269-271
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75225
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

91. Helly / 定理 / 擴張

(阪大) 山 辺 英 彦

(1948. 3. 25)

次ギノ定理ハ昨春東大デ、数学談話会デ河田敏義先生ノ出サレタ予想ヲ少シ擴張シテ証明シタモノデ Helly ノ定理ニ似カヨツテキルモノデス。

定 理 N 型空間 E ノ中ノ部分集合 M ガ *dense* 且ツ *convex* ナルトキ、 E ノ上ノ n 個ノ *linear functionals* $f_1, \dots, f_n$ ニ對シ、 E ヲ x ニ表シテ x ノ ε 近傍 $= y \in M$ ガアリ。

$$f_i(x) = f_i(y) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

ナラシメウル。

証 明、任意ノ $x \in E$ ニツキ、コトゴトクハ 0 デナイ n 個ノ実数ノ組 K_i ($i = 1, 2, \dots, n$) ニ對シテ

$$\sum_{i=1}^n K_i f_i(x) = \text{const} \quad (1)$$

トナラナイト仮定シテヨイ。

任意ノ $(n+1)$ 個ノ E ノ点ノ組、 $x_0, x_1, \dots, x_n$ ヲトルトキ、

$$\sum_{j=0}^n |\lambda_j| \neq 0 \quad \sum_{j=0}^n \lambda_j = 0 \quad (2)$$

ナル $(n+1)$ 個ノ実数 λ_j ($j = 0, 1, \dots, n$) ガ必ズ存在シ。

$$\sum_{j=0}^n \lambda_j f_i(x_j) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3)$$

トナルトスル。スルト

$$\det \begin{vmatrix} f_1(x_0) & \dots & f_1(x_n) \\ \vdots & & \vdots \\ f_n(x_0) & \dots & f_n(x_n) \end{vmatrix} = 0$$

トナル。故ニコトゴトクハ 0 デナイ n 個ノ実数 K_i ($i = 1, 2, \dots, n$) ガ存在シテ

$$\sum_{i=1}^n K_i f_i(x_j) = 0$$

コレハ(1)ニ反スル。故ニ(2),(3)ヲミタス $(n+1)$ 個ノ実数ノ組 $\lambda_j (j=0, 1, \dots, n)$ ハ存在シナイ。

次ギニ X ノ ε 近傍ニ n 個ノ点 $x_j (j=1, 2, \dots, n)$ ヲトリ。 $P, P_j (j=1, \dots, n)$ ヲ n 次元ユークリッド空間ノ点ト考ヘテ、

$$P = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$$

$$P_j = (f_1(x_j), f_2(x_j), \dots, f_n(x_j)) \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

ト座標ヲ対応サセル。コノ $P_j (j=1, 2, \dots, n)$ 及ビ P ハ上ノコトカラ互ニ一次独立ナラシメウル。又各 x_j ニ充分近ク $y_j (M$ ヲトレバ f_i ガ逆連続ナコトカラ、 P ト n 個ノ点 $P_j = (f_1(x_j), f_2(x_j), \dots, f_n(x_j))$
($j=1, 2, \dots, n$)

ヲ互ニ一次独立ナラシメウル。シカテ

$$\|y_j - x\| < \varepsilon \quad (4)$$

ニトレル。一受ニ

$$Z = (1 + n\delta)x - \delta \sum_{j=1}^n y_j \quad (5)$$

ナル点ヲ考ヘ、 δ ヲ充分小サクトレバ、 Z ハ x ノ $\frac{\varepsilon}{2}$ 近傍ニ入ル。

Z ノ $\frac{\varepsilon}{2}$ 近傍ニ $y_0 \in M$ ヲトルト

$$\|Z - x\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \|Z - y_0\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{カラ}$$

$$\|x - y_0\| < \varepsilon \quad (6)$$

ヲウル。

次ギニ $P, P_1, P_2, \dots, P_n$ ガ一次独立故。 $P_0 = (f_1(y_0), \dots, f_n(y_0))$

ナル点ハ、アル n 個ノ実数値 μ_j ニ表シ

$$P_0 = (1 + n\delta + \sum_{j=1}^n \mu_j)P - (\sum_{j=1}^n (\delta + \mu_j)P_j) \quad (7)$$

ヲ表ハサレル。コノコトハ

$$f_i(y_0) = (1 + n\delta + \sum_{j=1}^n \mu_j) f_i(x) - \sum_{j=1}^n (\delta + \mu_j) f_i(y_j) \quad (8)$$

($i=1, 2, \dots, n$)

トナルコトヲ表ハス。(8)ヨリ

$$f_i(x) = \frac{1}{1 + n\delta + \sum_{k=1}^n \mu_k} f_i(y_0) + \sum_{j=1}^n \frac{\delta + \mu_j}{1 + \sum_{k=1}^n \mu_k + n\delta} f_i(y_j) \quad (9)$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{1 + n\delta + \sum_{k=1}^n \mu_k}$$

$$\alpha_j = \frac{\delta + \rho_j}{1 + n\delta + \sum_{k=1}^n \rho_k} \quad (10)$$

トキキ. $y_0 \in Z$ 充分近クトリ. $|\rho_j| < \delta$ トナルヨウニスレバ

$$\alpha_j \geq 0 \quad (j=0, 1, \dots, n) \quad (11)$$

又各 f_i が convex テアルコトヲ用ヒテ

$$f_i(x) = \sum_{j=0}^n \alpha_j f_i(y_j) = f_i\left(\sum_{j=0}^n \alpha_j y_j\right) \quad (12)$$

$$\sum_{j=0}^n \alpha_j y_j = \bar{y} \in M \quad \text{ヲトレバ.}$$

$$f_i(x) = f_i(\bar{y}) \quad \text{且ツ (5), (11) ヲリ.}$$

$$\|x - \bar{y}\| = \sum_{j=0}^n \alpha_j \|x - y_j\| < \sum_{j=0}^n \alpha_j \varepsilon = \varepsilon \quad \text{即チ } \|x - \bar{y}\| < \varepsilon$$

依ツテ上記ノ定理ハ証明セラレタ.