OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Hellyノ定理ノ擴張
Author(s)	山辺, 英彦
Citation	全国紙上数学談話会. 1948, 2(9), p. 269-271
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75225
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

91. Hellyノ定理ノ擴張

(阪大) 山辺 英彦

(1948. 3. 25)

次ギノ定理ハ昨春東大デ，数学談話会デ河田敬義先生ノ出サレタ予想ヲ少シ擴張シテ証明シタモノデ Helly ノ定理ニ似カヨツテヰルモノデス.

定理　N型空間Eノ中ノ部分集合Mガ dense 且ツ convex ナルトキ，Eノ上ノn個ノ linear functionals $f_1, \cdots, f_n$ ニ對シ．E∋xニ應ジテxノε近傍ニ$y \in M$ガアリ.

$$f_i(x) = f_i(y) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

ナラシメウル.

証明．任意ノ$x \in E$ニツキ．コトゴトクハ0デナイn個ノ実数ノ組κ_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ニ対シテ

$$\sum_{i=1}^{n} \kappa_i f_i(x) = const \tag{1}$$

トナラナイト仮定シテヨイ.

任意ノ$(n+1)$個ノEノ点ノ組，$x_0, x_1, \cdots\cdots, x_n$ヲトルトキ.

$$\sum_{j=0}^{n} |\lambda_j| \neq 0 \qquad \sum_{j=0}^{n} \lambda_j = 0 \tag{2}$$

ナル$(n+1)$個ノ実数　λ_j $(j = 0, 1, \cdots\cdots, n)$ガ必ズ存在シ.

$$\sum_{j=0}^{n} \lambda_j f_i(x_j) = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots\cdots, n) \tag{3}$$

トナルトスル．スルト

$$\det \begin{vmatrix} f_1(x_0) & \cdots\cdots & f_1(x_n) \\ \vdots & & \vdots \\ f_n(x_0) & & f_n(x_n) \\ 1 & \cdots\cdots & 1 \end{vmatrix} = 0$$

トナル．故ニコトゴトクハ0デナイn個ノ実数κ_i $(i = 1, 2, \cdots\cdots, n)$ガ存在シテ

$$\sum_{i=1}^{n} \kappa_i f_i(x_j) = 0$$

コレハ(1)ニ反スル．故ニ(2).(3)ヲミタス$(n+1)$個ノ実数ノ組λ_j($j=0, 1, \cdots, n$)ハ存在シナイ．

次ギニχノε近傍ニn個ノ点χ_j($j=1.2, \cdots, n$)ヲトリ．P, P_j ($j=1, \cdots n$)ヲn次元ユークリッド空間ノ点ト考ヘテ．

$$P=(f_1(\chi), f_2(\chi), \cdots\cdots f_n(\chi))$$

$$P_j=(f_1(\chi_j), f_2(\chi_j), \cdots\cdots, f_n(\chi_j)) \quad (j=1.2 \cdots, n)$$

ト座標ヲ対応サセル．コノP_j($j=1, 2, \cdots\cdots, n$)及ビPハ上ノコトカラ互ニ一次独立ナラシメウル．又各χ_jニ充分近クy_j(Mヲトレバf_iガ連続ナコトカラ．Pトn個ノ点

$$P_j=(f_1(y_j), f_2(y_j), \cdots\cdots, f_n(y_j)) \quad (j=1, 2, \cdots\cdots, n)$$

ヲ互ニ一次独立ナラシメウル．シカモ

$$\| y_j - \chi \| < \varepsilon \tag{4}$$

ニトレル．一更ニ

$$Z=(1+n\delta)\chi - \delta \sum_{j=1}^{n} y_j \tag{5}$$

ナル点ヲ考ヘ．δヲ充分小サクトレバ．Zハχノ$\frac{\varepsilon}{2}$近傍ニ入ル．

Zノ$\frac{\varepsilon}{2}$近傍ニ$y_0 \in M$ヲトルト

$$\| Z-\chi \| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \| Z-y_0 \| < \frac{\varepsilon}{2} \quad カラ$$

$$\| Z-y_0 \| < \varepsilon \tag{6}$$

ヲウル．

次ギニP $P_1, P_2, \cdots\cdots, P_n$ガ一次独立故．$P_0=(f_1(y_0), \cdots\cdots, f_n(y_0))$ナル点ハ アルn個ノ実数値$\mu_j$ニ対シ

$$P_0=(1+n\delta+\sum_{j=1}^{n}\mu_j)P-(\sum_{j=1}^{n}(\delta+\mu_j)P_j) \tag{7}$$

デ表ハサレル．コノコトハ

$$f_i(y_0)=(1+n\delta+\sum_{j=1}^{n}\mu_j)f_i(\chi)-\sum_{j=1}^{n}(\delta+\mu_j)f_i(y_j) \tag{8}$$

$(i=1, 2, \cdots, n)$

トナルコトヲ表ハス．(8)ヨリ

$$f_i(\chi)=\frac{1}{1+n\delta+\sum_{k=1}^{n}\mu_k}f_i(y_0)+\sum_{j=1}^{n}\frac{\delta+\mu_j}{1+\sum_{k=1}^{n}\mu_k+n\delta}f_i(y_j) \tag{9}$$

$$\alpha_0=\frac{1}{1+n\delta+\sum_{k=1}^{n}\mu_k}$$

$$\alpha_j = \frac{\delta + \mu_j}{1 + n\delta + \sum_{k=1}^{n} \mu_k} \qquad (10)$$

トカキ．y_0ヲ Zニ充分近クトリ．$|\mu_j| < \delta$トナルヨウニスレバ

$$\alpha_j \geq 0 \quad (j = 0, 1, \cdots\cdots, n) \qquad (11)$$

又各f_iガ Linear デアルコトヲ用ヒテ

$$f_i(x) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j f_i(y_j) = f_i\left(\sum_{j=0}^{n} \alpha_j y_j\right) \qquad (12)$$

$\sum_{j=0}^{n} \alpha_j y_j = \bar{y} \in M$ ヲトレバ．

$f_i(x) = f_i(\bar{y})$ 且ツ(5)．(11)ヨリ．

$$\|x - \bar{y}\| = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \|x - y_j\| < \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \varepsilon = \varepsilon \quad \text{即チ } \|x - \bar{y}\| < \varepsilon$$

依ツテ上記ノ定理ハ証明セラレタ．