



Title	部分群ノ型ガ興ヘラレタ群ニツイテ
Author(s)	伊藤, 昇
Citation	全国紙上数学談話会. 1948, 2(9), p. 275-279
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75228
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

94. 部分群ノ型ガ與ハレタ群ニツテ

(名大) 伊藤 昇 (1943. IV 8)

コノ方面ノ研究トシテハ既ニ G. A. Miller 及ビ H. C. Mouno [1], O. J. Schmidt [2], D. Koriankowsky [3], [6], S. A. Tchevitchin [4], K. Iwasawa [5] 等ガ知ラレテ居リマス。次ニソレ等ノ結果ヲ要ツテ得ラレルコトヲニ述ベテ見度イト思ヒマス。併ニ定理 1ハ [6]ニ述ベラレテ居ル定理ノ一ツノ証明ヲ与ヘルモノデスケレドモ [6]ハ今ノ所 *Review*ニヨル以外ニ分リマセンノデ或ハ証明ニ重複ガアルカモ知レマセン。

[定義] 有限群 G 、ソノ位数ヲ $g = p^a n$ 、 $(p, n) = 1$ トスル。 G ガ位数 p^a 、正規部分群 N ヲ有スル時 G ヲ P -中間群 ト呼ブコトニシマス。ソウスルト G ガ P -中間群 ナラバ、ソノ部分群及ビソレニ逐同型ナ群ハヤハリ P -中間群 ニナリマス。但シソレヲノ群 G' ノ位数ガ P デ割レナイ時ハ $G' = N'$ ト取リマス。

[補題 1] ([4]) G ノスベテノ真部分群ガ P -中間群 ナラバ G 自身 P -中間群 ニナル。唯一ノ例外ハ G ノ P, q -Sylow 群 ($p \neq q$) ノ一ツヲ夫々 S_p, S_q トスル處、 $G = S_p S_q$ 、 $G \cap S_p, S_q$ 之両群ニナル場合デアル。

今スベテノ真部分群 H 中間群デアルモノハ非中間群ヲ S -型ノ群ト呼ブコトニシマス ([2], [4], [5]) 例外ハ S -型ノ群デアルワケデス。

[4] デハ中間群トシタ場合ニ同じ結果ガ得ラレルコトヲ示シテ居リマス。

[証明] 1) 証明デナイ場合、ソノ場合ニハヨリ知ラレタ Burnside ノ定理ニヨツテ次ノ様ナ P -群 P ガ存在シマス。 $Np \ni A$ ヲ適宜ニ取レバ $P\{A\} \subset \{A\}$ 。然シ問題 1 ノ仮定ノ下ニ於テハ、コノ事実ハ $P\{A\} = G$ デアルコトヲ示シマス。更ニ A ノ位数ヲ $a = q^f m$ トスル時ハ $(a, p) = 1$ デスガ、若シ $m > 1$ ナラバ補題 1 ノ仮定ノ下ニ於テハ A^{q^f} 及ビ $A^{q^f m}$ ガ P ト元可換ニナリ。從ツテ又 A ガ P ト元可換ニナリマスカラ、上ノ事実ハ更ニ $a = q^f$ ナルコトヲ要求シマス。從ツテ例外ノ場合ヲ除イテハ問題 1 群ハスベテ P -正規デアリマス。即チコノ場合ニハ補題 1 ハ証明サレマシタ。

2) P -正規デアアル場合、コノ場合ニハヨク知ラレタ Grün ノ定理ニヨツテア

ル p -Sylow 群ノ中心ヲ Z_p ヲ G ニ於ケル正規部分群トシ $N_{Z_p} G$ 及 N_{Z_p} ノ p -交換子群ヲ夫々 $G'(p)$, $N_{Z_p}(p)$ トスル時 $G/G'(p) \cong N_{Z_p}/N_{Z_p}(p)$ $G \neq N_{Z_p}$ トスルト補題 1 ノ仮定カラ $N_{Z_p} \neq N_{Z_p}(p)$ ノ場合ニハ補題 1 ハ容易ニ証明サレマスカラ $G = N_{Z_p}$ トシマス. ノコト G ノ任意ニツイテ $induction$ ヲ行ヘバ G/Z_p ニツイテハ補題 1 ガ成立シマス. ソノ時 G/Z_p ガ p -中零群ニナレバ $Z_p = Sp$ ナル場合ヲ除イテハ G 自身又 p -中零群ニナルコトハ見易イ. 又 G/Z_p ガ例外ノ場合ニナレバヤハリ G 自身又例外ノ場合ニナルコトニ容易ニ分リマス. 従ツテ残リハ $Z_p = Sp$ 即チ Sp ガ G ノ *Abel* 正規部分群ナル場合デアリマス. ソコデ今 $g = p^e q^f r^h \dots$ ト假定シマス $Sp Sq Sp Sr \dots \in G$ トナリ補題 1 ノ假定ノ下ニ於テハ Sp ハ $Sq, Sr, \dots$ ト元可換ニナリ結局 $n = \frac{p^e}{p^e}$ ナル位数ノ部分群ヲ N トスレバ (ソノ存在ハ *Schur* ノ定理ニヨル *H. Zassenhaus* ノ教科書参照) G/N トナリマス. ソウスルト $g = p^e q^f$ ナル場合ダケニナリマスガ. ソノ場合 e q -Sylow 群ガ巡回群デナレバ. ヤハリ G ガ p -中零群ニナルコトハ明白デアリマス. 即チコノ場合ニモ補題 1 ハ証明サレマシタ.

カクテ補題 1 ハ完全ニ証明サレマシタ.

サテ G ノ部分群ヲスベテ考ヘ. 互ニ同型ナモノヲ一ツノ類ニ集メレバ G ノ部分群ハ同型類ニワカレマス. ソノ時 G 及ビ $\{e\}$ カ夫自身夫々一ツノ類ヲナスコトハ明白デスガ. コノニツラ除イタ同型類ヲ本質的ナ同型類ト呼ブコトニ致シマス. 更ニ各同型類ヲ組成スル部分群ガ例ヘバ中零群ナルカ非中零群ナルカニ從ヒ. ソレヲノ同型類ヲ又中零類. 非中零類ト呼ブコトニシマス.

【定理 1】 **【6】** 非可解群 G ソノ位数ヲ $g' = p_1^{e_1} \dots p_n^{e_n}$ トスレバ G ハ少クトモ n 個ノ本質的ナ非中零類ヲ含ム.

【証明】 コレモヨク知らレタ *Burnside* ノ定理カラ $n \geq 2$ ナル時ハ G ノ可解群ニナリマスカラ定理 1 ノ假定ノ下ニ於テハ $n \geq 3$ トナリマス.

リコデ先ツ定理 1 ヲ最終群 G ニツイテ証明シマス. サテ任意ノ p_i ニ對シテ G ノスベテノ真部分群ガ p_i -中零群デアルト假定シマス $n \geq 3$ ナルコトカラ補題 1 ニヨリ G ハ指数ガ $p_i^{e_i}$ ナル正規部分群ヲ有スルコトニナリマス. ソノ後ナコトハ不可能デスカラ. G ニハ少クトモ一ツ p_i -中零群テナイ真ナ真部分群ガ存在スルコトニ

ナリマス。従ってソノ様ナ部分群ノうちニ他致極小ナモノガ存在シマスカラ、ソレ...ニ注目スレバ、ソレハ補題 1ノ例外ノ群ニナリマス。ソレヲ G_i ト致シマス。各 G_i ガ同型デナイコトハ明白デスカラコレデ定理 1ハ単純群ノ場合ニハ証明サレマシタ。コハデ G_i ガ S -重ノ群ナルコト 明白デアリマセウ。

サテ定理 1ノ証明ヲ考ヘマス。位数 $g = p_1^{e_1} \dots p_k^{e_k}$ ノ群 G ガ高々 $k-1$ 個シカ本質的ナ非中零項ヲ含マナケレバ G ハ可解群デアルト云フコトニナリマスガ、上記証明ニヨレバ G カ非置絶デアルコトハ証明サレタワケデス。デスカラ *induction*ヲ使ツテ G カ更ニ可解群デアルコトヲ証明シマス。ソウスレバ定理 1ハ完全ニ証明サレタコトニナリマス。今アル P_i ニツイテ G ノスベテノ真部分群ガ P_i -中零群デアル場合ニツイテ考ヘレバヨイコトハ上記証明ニヨリ明白デスカラ、ソレヲ仮定シマス。ソノ場合 G ハ指数ガ $P_i^{P_i}$ ナル正規部分群 N ヲ含ミマス。 N ノ位数ハ $n = p_1^{e_1} \dots p_{i-1}^{e_{i-1}} p_{i+1}^{e_{i+1}} \dots$ デアリマスカラ N ガ中零群デナケレバ定理 1ノ仮定カラ N ハ本質的ナ非中零項ヲ高々 $k-2$ 個シカ含マスコトニナリ *induction*ノ仮定カラ N ハ可解群ニナリマス。 N ガ中零群ナラハ、ソレハ勿論可解群デスカラ、結局何レニシテモ N ハ可解群ニナリ 従ツテ G 自身可解群ニナリマス。

コレデ定理 1ハ完全ニ証明サレマシタ。

[補題 2] ([3]) 有限群 G , p ヲ G ノ位数ヲ割ルーツノ素因数. S_p アーツノ p -Sylow 群 S_p' ヲソノ交点子群ト致シマス。今 G ガ本質的ナ非 p -中零項ヲ高々 k ツツシカ含マナイナラバ G ハ非置絶デアル。但シ $S_p/S_p' \cong (P.M. p)$ 型 $Abel$ 群デハナイトスル。

[3]ニ於テハ補題 2ノ p -中零ヨリ強ク中零トシ、ソノ代リニ $S_p =$ 階スル仮定ヲ除イタ定理ガ証明サレテ居リマス。

証明 1) p -正規ナル場合。ソノ場合ニハ補題 1(証明 2)ニ於ケル記号ヲノママ使ヘバ又 $G/G'(p) \cong N_{2p}/N_{2p}(p)$ ココデ $N_{2p} = G$ ナラバソレハ即チ $2p$ ガ G ノ正規部分群デアルト云フコトデアリマスカラ補題 2ハ証明サレタコトニナリマス。故ニ以下 $N_{2p} \neq G$ デアルト仮定シマス。ソノ時 N_{2p} ガ p -中零群デアレバ $N_{2p} \cong N_{2p}'(p)$ ソウスレバ又 $G \cong G'(p)$ ココデ $G'(p) = \{e\}$ ナラバ G ハ p -群トナリ其上 G カ然カモ置絶群ナラバ、 G ハ位数 p ノ巡回群ニナリマスカラ結局

$Sp/Sp' = Sp = G$ は p -型 $Abel$ -群で補題 2 の仮定に反します。即ちこの場合は補題 2 の証明が成り立たないことが示されます。故に以下 $G'(P) \neq \{e\}$ と仮定致します。そうすると $G'(P)$ は G の $G, \{e\}$ と異なる正規部分群となり、補題 2 の証明が成り立たないことが示されます。そうすると残り $N_{2p} = N_{2p}(P)$ 即ち N_{2p} が非 p -中核群の場合です。そうすると補題 2 の仮定から N_{2p}' の真部分群はすべて p -中核群であることが示されますから補題 1 によれば N_{2p} は S -型ノ群でなければなりません。然るに $K. Iwasawa$ [5] 及び $G.A. Miller$ 及び $H.C. Moreno$ [1] によればこの時 (N_{2p}, Sp) Sp/Sp' は (P, π, P) 型 $Abel$ 群になりますから定理 2 の仮定に反します。即ち補題 2 の仮定の下に於ては N_{2p} は p -中核群であり、結局この場合補題 2 の証明が成り立たない。

2) p -正規でない場合。この場合は補題 1 の証明 1) に於ける如く $N_0 \neq A$ となる。即ち $P \neq \{A\}$ $\{A\}$ $(\alpha, P) = 1$ のような p -群 P が存在する。ケデスガ補題 2 の仮定の下に於ては $N_p = G$ か $N_p = P \setminus \{A\}$ が成り立たないことが示されます。前者の場合 P が G の正規部分群であり、従って定理 1 の成立が明白になりますから以下 $N_p = P \setminus \{A\}$ と仮定します。そうするとこのことから更に $P = Sp$ であることが示されることが容易に分かります。然るに補題 2 の仮定の下に於ては N_p の真部分群はすべて p -中核群であることが補題 1 から N_p は例外の場合、即ち N_p は S -型ノ群であることが示されます。そうすると又 $K. Iwasawa$ [5], $G.A. Miller$ 及び $H.C. Moreno$ [1] によれば Sp/Sp' は (P, π, P) 型ノ $Abel$ 群になります。これは補題 2 の仮定の下に於ては不可能です。即ちこの場合は補題 2 の証明が成り立たない。

かくて補題 2 は完全に証明が成りました。

定理 1 補題 2 から直ちに次の定理が得られます。

[定理 2] 置換群 G , その元を $g = p_1^{e_1} \dots p_n^{e_n}$ 更には p_i に対して Sp_i/Sp_i' が $(P_i, \dots, P_i)$ 型 $Abel$ 群でないと致しません。そうすると G は少くとも $n+1$ 個の本質的に非中核群を含みます。

以上

文献

[1] G.A. Miller, H.C. Moreno; Trans. A.M.S. 4. pp 313-404 (1903)

- [2] O.J. Schmidt; Rec. math. 31 B-4 PP 566-572 (1924)
- [3] D. Koliankovsky; C R. URSS. N.S 19. pp 343-345 (1938)
- [4] S.A. Tikhonovitch; Rec math. T.4 (46) N.3 (1933)
- [5] K. Iwazawa; Proc Phy-Mat. Sec. 23. PP 1-4 (1941)
- [6] D. Koliankovsky; Rec. math. N. 5 19(61) PP 429-437 (1946)