OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	抽象空間ノ full normality ニ就テ（Ｉ）
Author(s)	白田, 平
Citation	全国紙上数学談話会. 1948, 2(9), p. 283-291
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75230
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

96. 抽象空間ノ full normality ニ就テ (I)

(阪大) 白田 平 (1948. 4. 30)

"Fully normal" トイフ概念ハ Tukey ガ "convergence and uniformity in topology" [I] ニオイテ導入シタヤウニ思ハレルガ. コノ概念ヲ用ヒルト local property ヲ uniformly local property ニ改メルコトガ出来ル (§1) 且距離空間ノ場合ノ角谷先生ガ出サレタ定理ヨリ簡単ナ且見通シノヨイ証明ヲ与ヘルコトガ出来ル.

§2ニオイテ A. Weil ガ Sur les Espaces à structure uniforme et sur la topologie generale [II] ニオイテ予想シタ問題ノアル種ノ解ヲ与ヘ. §3デ fully normal space ノ各種ノ空間ノ分類ニオケル位置ニツイテ論ズル. 尚未解ナ問題モ多ク残ツテヰルノデソレハ次回ニ述ベルコトニスル. コヽデ改メテ常ニ御指導下サツテヰル寺阪 小松両先生ニ深ク謝意ヲ表スルモノデス.

§1. [定義] 空間 R ノ open covering $\mathfrak{U}$ (必ラズシモ有限トハ限ラナイガ) open covering $\mathfrak{V}$ ノ (ア)- refinement デアルトハ 次ノトキニ云フ.

$$\text{即チ } (\forall U \in \mathfrak{U})(\exists V \in \mathfrak{V}) \begin{pmatrix} V \supset \sum U_\lambda \\ \lambda \text{ ハ } \Omega \text{ ノ} \\ U_\lambda \in \mathfrak{U} \end{pmatrix}$$

コレヲ $\mathfrak{U}^* < \mathfrak{V}$ ト記ス.

[定義] open covering ガ normal open covering デアルトハ open covering ノ sequence $\{\mathfrak{U}_n\}$ ガ存在シテ

(1) $\mathfrak{U} \overset{*}{>} \mathfrak{U}_0 \quad \mathfrak{U}_n \overset{*}{>} \mathfrak{U}_{n+1} \quad ; \ n = 0, 1, 2, \cdots\cdots$

ナルトキニ云フ.

[定義] T.- space R ガ fully normal デアルトハ スベテノ open covering ガ normal デアルトキニ云フ.

(註) 以下 open covering ノコトヲ單ニ covering ト記スコトニスル.

[定理 1] uniform structure $\mathfrak{U}$ ガ hereditary property P ヲ包括的ニ有スレバ且 $\mathfrak{U}$ ノ位相ガ fully normal デアルナラバ

Pヲ uniformly local property トシテ有スルヤウナXノ structure ヲ作ルコトガ出来ル.

且 更ニ落リXノ改メラレタ uniformity (structure ヲ作ル covering ノ system) ヲ $\{\mathfrak{U}_\alpha | A\}$ トスレバ

$(\forall \alpha \in A)\ (\forall p \in X)\ (S(p, \mathfrak{U}_\alpha)$ ハ性質Pヲ有スル)

ヤウニ出来ル. コヽデ $S(p, \mathfrak{U}_\alpha)$ ハ Pヲ含ム $\mathfrak{U}_\alpha$ ノ element ノ和集合即チPノ近傍ノ基コトデアル.

(証明) 仮定ニヨリ若メノ structure ノ uniformity ヲ $\{\mathfrak{U}_b | B\}$ トスレバ $(\forall p \in X)\ (\exists b(p) \in B)\ (S(p, \mathfrak{U}_{b(p)})$ ハ性質Pヲ有スル) $\mathfrak{U} = \{S(p, \mathfrak{U}_{b(p)}) \mid p \in X\}$ ハ Xノ covering 且Xガ fully normal デアルコトヨリ covering ノ sequence $\{\mathfrak{U}'_n\}$ ガ(I)ヲ満足スルヤウニ存在スル. 今 $\mathfrak{U}_n = \mathfrak{U}_1 \wedge \mathfrak{U}'_n$ $n = 1, 2, \cdots$ $b \in B$ トル covering ヲ作ル. コヽデ $\mathfrak{U}_\alpha$ ハ $\mathfrak{U}_b$ ノ element ト $\mathfrak{U}'_n$ ノ element トノ共通部ガ全体ヨリナル covering ノコトデアル. 然ラバ $\{\mathfrak{U}_\alpha\}$ ハXノ structure ヲ作ルコトガ分ル. ナゼナラバ Xノ一点pノ近傍 $U(p)$ ニ対シテ

$$U(p) \supset S(p, \mathfrak{U}_b)$$

デアルヤウナbガ存在スル. 然ルニ $\mathfrak{U}_b > \mathfrak{U}_\alpha = \mathfrak{U}_b \wedge \mathfrak{U}'_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ デアルカラ. 即チ $\mathfrak{U}_\alpha$ ノ element ハ $\mathfrak{U}_b$ ノドレカーツノ element ノ中ニ含マレルカラ $U(p) \supset S(p, \mathfrak{U}_b) \supset S(p, \mathfrak{U}_\alpha)$

且 $S(p, \mathfrak{U}_\alpha)$ ハ開集合デアルコトヨリ $\{\mathfrak{U}_\alpha\}$ ハXノ topology ト一致スル uniformity デアルコトガ分ル. コノトキ

$$\forall \alpha \in A = \{(b, n) \mid b \in B, n = 1, 2, \cdots\} \quad \forall p \in X \quad \exists U \in \mathfrak{U}$$
$$S(p, \mathfrak{U}_\alpha) \subset S(p, \mathfrak{U}_n) \subset S(p, \mathfrak{U}_0) \subset U \in \mathfrak{U}$$

トナルカラ且 U ハ性質Pヲ有スル. 茲ニ Pノ hereditary property ナルコトヨリ $S(p, \mathfrak{U}_\alpha)$ モ性質Pヲ有スル.

(註) 証明デ分ルヤウニ、コノ定理ガ成立スルタメニ十分ナ条件ハ $\mathfrak{U}$ ガ normal ナルコトデアル.

次ニ定理1ハ 川ト云テ角谷先生ノ云ハレタ定理ヲ証明スル.

〔定理2〕 metric space R が local property P ヲ有シ且ツ P が hereditary デアレバ、R ノ位相ヲ不変ニシテ P が uniformly local property ナル故ニ R ニ距離ヲ入レルコトガ出来ル.

(証明) metric space ハ fully normal デアル.(I)参照) 且 $\{S(x,4^{-n})\mid x\in R\}=\mathfrak{U}_n$ トスレバ. コレハ R ノ topology ト一致スル uniformity デアル. 即チ structure デアル. 仮定ニヨリ定理1ト同様ニ $\mathfrak{U}_n$ ヲ作リ (I)ヲ満足スル $\mathfrak{U}'_n$ $n=1,2,\cdots$ ヲ取ル. 且ツ $\mathfrak{V}_n=\mathfrak{U}_n\wedge\mathfrak{U}'_n$ トスル. コノトキ $\mathfrak{V}_n \overset{*}{>} \mathfrak{V}_{n+1}$ $n=1,2,\cdots$ デアル. 且 $\{\mathfrak{V}_n\}$ ハ R ノ topology ト一致スル uniformity デアルコトハ明ラカ. 今 pseudo-ecart f ヲ次ノ様ニシテ作ル.

$$\begin{aligned}
&\text{若シ } \forall n \quad x\in S(y,\mathfrak{V}_n) \text{ ナラバ } f(x,y)=0\\
&\qquad x\notin S(y,\mathfrak{V}_1) \text{ ナラバ } f(x,y)=1\\
&\qquad x\in S(y,\mathfrak{V}_n)-S(y,\mathfrak{V}_{n+1}) \text{ ナラバ } f(x,y)=2^{-n}
\end{aligned}$$

且 $f(x,y)=\inf\left(\sum_{r}^{n} f(x_r,x_{r+1})\right)$ コヽデ $x_0=x,\cdots,x_{n+1}=y$ 且スベテノ $n\geq 0$ トスベテノ X ノ点 $x_1,\cdots x_n$ ニツイテノ infimum ヲトル. 然ラバ $\frac{1}{4}f(x,y)\leq \rho(x,y)=f(x,y)$ 且 ρ ハ R ノ topology ト一致スル metric トナル. (Frink, 1939) コノ ρ ヲ使ッテ 且 $S(x,\frac{1}{4})<S(x,\mathfrak{V}_1)<U\in\mathfrak{U}$ ナル U ガ存在スルカラ $S(x,\frac{1}{4})$ ハ性質 P ヲ有スル.

ナゼナラバ $\rho(xy)<\frac{1}{4}$ ナラバ $f(xy)<1$ 依テ $x\in S(y,\mathfrak{V}_1)$

〔定理3〕 metric space R が locally complete ナラバ. uniformly locally complete ナルヤウニ位相ヲ不変ニシテ距離ヲ入レルコトガ出来ル. 且ダカラ complete ニナル.

(証明) 定理2ニオケルヤウニ距離ヲ入レル. コノトキ $S(x,\frac{1}{4})$ ニオケル metric ρ ニ関スル Cauchy sequence ハ $\mathfrak{U}_n \overset{*}{>} \mathfrak{V}_n$ ナルコトヨリ 勿論始メノ metric ニ関スル cauchy sequence デアルカラ仮定ニヨリ収斂スル.

〔定理4〕 fully normal space X ノアル structure ガ locally compact デアルナラバ、uniformity $\{\mathcal{U}_\alpha | A\}$ カ存在シ且ソレハ topology ト一致シテ

$$(\forall \alpha \in A)(\forall p \in X)(\forall n)(\overline{S^n(p, \mathcal{U}_\alpha)} \text{ ガ compact})$$

ナルヤウニ出来ル。コヽデ $S^n(p, \mathcal{U}_\alpha) = (S(S^{n-1}(p, \mathcal{U}_\alpha), \mathcal{U}_\alpha)$ 即チ $S^{n-1}(p, \mathcal{U}_\alpha)$ ト共通部分ヲ有スル $\mathcal{U}_\alpha$ ノ element ノスベテノ和集合デアル。

（証明） 定理ヱ手作ッタ structure ヲ用ヒレバヨイ。コノトキ。

$$(\forall p)(\forall \alpha)\ (\overline{S(p, \mathcal{U}_\alpha)} \text{ ハ compact})$$

然ルニ $\mathcal{U}_0 \overset{*}{>} \mathcal{U}_\alpha$ ト $\forall \alpha \in A$ ニ関シテナルカラ、n ニ関スル帰納法ニヨリ若シ $R \subset X$ ガ compact デアルナラバ、$\overline{S(Q, \mathcal{U}_\alpha)}$ モ compact ナルコトヲ云ヘバヨイ　Q ノ compact ナルコトヨリ

$$Q < \sum_{i=1}^{n} S(a_i, \mathcal{U}_\alpha)$$

ナル a_i ガ存在スル。

$$S(Q, \mathcal{U}_\alpha) < \sum_{i=1}^{n} S^2(a_i, \mathcal{U}_\alpha) < \sum_{i=1}^{n} S(a_i, \mathcal{U}_0)$$

依テ $\overline{S(Q, \mathcal{U}_\alpha)} < \sum_{i=1}^{n} \overline{S(a_i, \mathcal{U}_0)}$

然ルニ右辺ハ compact 依テ左辺モ。

〔系〕 metric space R ガ local compact ナラバ 位相ヲ不変ニシテ metric ヲ改メ且ソレヲ δ デ表ハセバ。

$$(\forall p \in R)\quad (\delta(p, 1) \text{ ハ compact})$$

ナルヤウニ出来ル。

証明ハ定理4及ビ定理2ノ証明ヨリ明ラカデアル。

§2. A. Weil ハ〔II〕ノ終リデ如何ナル space デアレバソノアル structure ガ常ニ complete デアルヤウニスルコトガ出来ルカ？ト云フコトヲ問題トシテ且ツラク normality ハ必要デアロウト云ツテヰル。然シ Tukey ハ〔1〕デ completely normal デモソノ a struct 即チスベテノ normal covering ヨリナル structure ハ complete デナイコトヲ示シタ。即チコノ space ハ如何ナル structure ヲトツテモ天

シテ complete ニハ ナラヌ. ナゼナラバアル structure デ complete ナラバ. a-structs デモ complete デアルカラ. コハデ fully normal space ノ a-structure ハ complete デアルコトヲ示ス.

[定理5] fully normal space X ノ a-structure ハ complete デアル.

(証明) 若シ cauchy phalanx $X(\alpha|A)$ カ収斂シナイモノトスレバ $(\forall p\in X)$ ($\exists U(p)$: p ノ開近傍) ($X(\alpha|A)$ ハ $U(p)$ デモ終ニナイ)

カカル $U(p)$ ノ集合ヲ $\mathfrak{U}$ トスレバ. $\mathfrak{U}$ ハ cauchy 且 X ガ fully normal ナルコトニヨリ $\mathfrak{U}$ ハ a-structure uniformity element トナル. 依テ $\mathfrak{U}>\mathfrak{U}_1$ ナル $\mathfrak{U}_1$ モ

且 $(\forall p\in X)$($X(\alpha|A)$ ハ $S(p,\mathfrak{U}_1)$ デ終ラナイ)

ナゼナラバ $S(p,\mathfrak{U}_1)$ ($\forall p\in X$) ナル $\mathfrak{U}$ ガ存在シ コノ $\mathfrak{U}$ ニ関シテハ $X(\alpha|A)$ ハ終ラナルコトハナイカラ. 然ルニ $X(\alpha|A)$ ハ cauchy phalanx デアルカラ $(\exists p\in X)$($X(\alpha|A)$ ハ $S(p,\mathfrak{U}_1)$ デ終ル) デナケレバナラヌ. コレハ矛盾スル.

(注) A. Weil ハ cauchy phalanx デハナク cauchy family ヲ用ヒテヰルガ ソノマヽコノ定理ハ cauchy family ヲ用ヒテモ同様デアル.

(注) topological group デ ソノ left invariant (right-invariant) structure ニ関シテノ complete ハ必ラズシモ group トハナラヌ. 依テ topological group ハアル structure ニ関シテハソノ completion ハ必ズ group ニナルデアロウカ? トイフ問題ガ生ズル. コレノ答ノ一部トシテ ミンゾノ topology ガ fully normal ナラバ completion ハ可換 group トナルヤウナ structure ガ存在スルコトガ定理5ヨリ云ヘル.

定理5ヨリ a-structure 大切ナコトガ分ルガ. Tukey ハ[1]デ α-structure ノ completion ハ a-structure ニナルカ? ハ未解デアルトシテヰル. コヽデコノ解ヲ与ヘル.

[定理6] a-structure completion ハ a-structure デアル.

(証明) X ヲ T_1 ト completely regular space トスル. X ノ normal covering ノ全体ノ system ヲ $\{\mathfrak{U}_a^{|A}\}$ トスル. 即チコノ uniformity ヲ有スル structure ガ a-structure デアル. 今 $\{\mathfrak{U}_a\}$ ニ関スル cauchy phalanx デ equivalent ナモノ一組トシテ X^* トキ 且 $\{x^*\}=X^*$ トシ X^* ノ structure ノ uniformity ノ basis ヲ次ノ様ニ定メル. U ヲ X ノ open set トシ.

$$U^*=\{x^*|x(\delta|\Delta)\in x^* \text{ ナラバ } x(\delta|\Delta) \text{ ハ } U \text{ デ等終}\}$$

コノトキ $\mathfrak{U}_a^*=\{U^*|U\in\mathfrak{U}_a\}$ トシ 且 $\{\mathfrak{U}_a^*|A\}$ ヲ X^* ノ uniformity ノ basis トスルコトガ出来. 且コレガ completion デアルコトガワカル.

且. $\mathfrak{U}_a=\{U^*\cap X|U^*\in\mathfrak{U}_a^*\}$ ト, $x\in X$ = equivalent ナ cauchy phalanx ノ組 x^* トヲ同一視スレバナル.

(小松氏: 位相空間論 及ビ Tukey [1] 参照)

サテ $\mathfrak{U}'$ ヲ X^* ノ任意ノ normal covering トスレバ $(\exists\,\mathfrak{U}_a^*\ a\in A)$ $(\mathfrak{U}'>\mathfrak{U}_a^*)$ ナルコトヲ云ヘバヨイ.

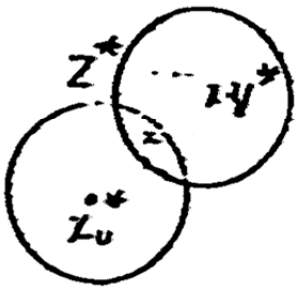
$\mathfrak{U}'$ ノ X^* ニオケル normality ヨリ

$(\exists\,\mathfrak{U}'',\ \mathfrak{U}''')(\mathfrak{U}'>^*\mathfrak{U}'',\ \mathfrak{U}''>^*\mathfrak{U}''$ 且 $\mathfrak{U}'''$ ハ X^* ノ normal covering)

コノトキ $\{\overline{U}|U\in\mathfrak{U}'''\}<\mathfrak{U}'$

ヲ云フ ナゼナラバ U ヲ x_0^* $\overline{U}$ ヲ y^* ヲトレバ $S(y^*,\mathfrak{U}''')$ ヘ U ヲ Z^* ナル Z^* ガ存在スル. ダカラ $S^2(x_0^*,\mathfrak{U}''')$ ヲ y^* ダカラ

$(\exists\,U'\in\mathfrak{U}')(U'\ni S^{-1}(x_0^*,\mathfrak{U}'')\supset\overline{U})$



次ニ $\mathfrak{U}''=\{U_\rho|P\}$ トシ $\Theta=\{X\cap U_\rho|P\}$ トスレバ $\mathfrak{U}''$ ノ normality ヨリ Θ ハメデ normal トナル. 依テ $\Theta=\mathfrak{U}_a$ ナル $a\in A$ ガ存在スル. コノトキ $\mathfrak{U}_a^*$ ガ云ヘル.

$U\in\mathfrak{U}_a^*$ トスレバ. $U=(X\cap U_\rho)^*$ ナル $\rho\in P$ ガ存在スル.

U ヲ x^* ヲ $X(\S 10)$ トスレバ 定義ヨリ $X(\delta|\nu)$ ハ $X\cap U_\rho$ デ等終

且タカラ U_γ テ三等級デアル．然ルニ $\chi(\delta|0)\to\chi^*$ トハ χ^* デナル．ナゼナラバ $\mathfrak{L}^*$ ノ任意ノ近傍ノ基 $S(\chi^*,\mathfrak{U}^*_{\alpha'})$ ヲトレバ

$(\exists U^*\in\mathfrak{U}^*_{\alpha'})(U^*\ni\chi^*$ 且 $U^*\subset S(\chi^*,\mathfrak{U}^*_{\alpha'}))$

定義ニヨリ $\chi(\delta|0)$ ハ U デ連続且タカラ U^* デ且タカラ $\chi(\delta|0)$ ハ $S(\chi^*,\mathfrak{U}^*_{\alpha'})$ テ等級デアルカラ．

タカラ $\chi^*\in\overline{U_\gamma}$ 然ルニ $(\exists V\in\mathfrak{U})(V\supset\overline{U_\gamma})$

依テ $V\supset\overline{U_\gamma}\ni U$ 即チ $\mathfrak{U}^*_\alpha$ ニ属スルスベテノ open set ニ對シ $\mathfrak{U}'$ ノ element ガ存在シテソレヲ含ムカラ $\mathfrak{U}^*_\alpha<\mathfrak{U}'$ ガ云ヘタ．

93. ココデハ *fully normal space* ノ位置ニツイテ論ズル．

fully normal ナラバ勿論 *normal* デアル．且 *compact completely regular space* ハ *fully normal* 且 *metric space* ハ *fully normal* デアルコトガ分ル（〔1〕參照）

然ラバ *completely normal space* ハ *fully normal* カ？コレハ否定サレル．

【例1】 ℭヲ非可附番集合ト，且「eヲソノ可附番部分集合ノ体系トスル．且 *zorn* ノ *lemma* ニヨリ包摂関係ニヨル大小関係デ *maximal linearly-ordered subfamily* ガ「eノ中ニ存在スル．コレヲ Γ トス 且 Γ ニ次ノ如ク位相ヲ導入スル．トノ近傍ハ $\{\psi\}$ トスル．コヽデ ψ ハ空集合且 $\gamma\in\psi$ $\gamma'\subseteq\gamma$ ナラバ $\Gamma_\gamma(\gamma')=\{\beta\,|\,\gamma'\subseteq\beta<\gamma,\ \beta\in\Gamma\}$ ヲ含ムモノトスル．コノトキ Γ ハ *completely normal space* ドナルガソノ *a-structure* ハ *complete* デハナイ（〔1〕．P 77）然ルニ *fully normal* ナラバ．*a-structure* ハ *complete* デアル．依テ Γ ハ *fully normal* デハナイ（〔定理 5〕）

実際 Γ ノ *normal covering* ハアル $S_\Gamma=\{\beta\,|\,\beta>\Gamma\}$ ヲ含マネバナラヌコトカラ云ヘル．然ルニ $\{\Gamma_{\gamma_0}(\gamma)\,|\,\forall\gamma\in\Gamma\}$ ハドノ S_Γ ヲモ含ミ得ナイ．依テコノ *covering* ハ *normal* デハナイ 即チ Γ ハ *fully normal* デハナイ．

【例2】 *fully normal* デ *completely normal* デナイ例トシテ

i) $I_1=\{\mu \mid 1 \leqq \mu \leqq \omega\}$ $I_2=\{\lambda \mid 1 \leqq \lambda \leqq \omega_1\}$

且 I_1 ハ ω ノミヲ cluster point トシテ有シ I_2 ハ順序ニヨル通常ノ topology ヲ有スルモノトスレバ.

$I_1 \times I_2$ ハ compact デアルカラ fully normal. シカシ completely normal デナイコトハヨク知ラレテヰル.

ii) parallelotope I^α デ $\alpha > \alpha_0$ ナラバ コレハ要求ヲ満足スル例デアル. ナゼナラバ I^{α_1} ハ $I_1 \times I_2$ ヲ位相的ニ含ムカラ.

〔例3〕 completely normal ヲ強メテ

若シ2ツノ閉集合 F_1 F_2 ガ fremd ナラバ.

$(\exists f)\ (0 \leqq f(x) \leqq 1$ 且 $f(x)=0$ $x \in F_1$. $f(x)=1$ $x \in F_2$ 且 $f(x)$ ハ連続)

ト云フ以上ニ $\{x \mid f(x)=0\}=F_1$ $\{x \mid f(x)=1\}=F_2$ トナルヤウナ強イ意味デノ completely normal 且 fully normal ナ space ヲ強イ意味デノ completely normal デナイ例トシテ I_2 ヲ挙ゲルコトガ出来ル. ナゼナラバ ω_1 ハ閉集合且 G_δ 集合デナイ. 然ルニ弱イ意味デノ completely normal デアルナラバ ω_1 ノ閉集合ハ G_δ 集合トナルカラ.

〔例4〕 compact ナ normal space ハ fully normal デアルコトハ既ニ云ッタ. 然ラバ locally compact ナラバ fully normal デアロウカ. コレハ否定サレル. 大体 fully normality ハ空間全体ニ関スル性質デアルガ一方 locally compact ハソウデナイカラ否定サレ得ルコトハ殆ンド自明ナノデアルガ 例トシテ例1ノ空間 Γ ヲ挙ゲレコトガ出来ル. ナゼナラバ Γ ハ locally compact トナルカラ

Γ ヲ γ $\Gamma_\phi(\gamma)$ ヲトル. $\overline{\Gamma_\phi(\gamma)}=\{\beta \mid \overline{\alpha+\beta} \leqq \gamma\}=\Gamma_\phi(\gamma)$

且 β_α ナル $\Gamma_\phi(\alpha)$ ノ phalanx ヲ考ヘル. $\bigcup_\alpha \beta_\alpha=\beta$ トスレバ.

$\beta \in \Gamma$ 且 $\beta_\alpha \to \beta$ トナル.

元ヅ $(\forall \gamma \in \Gamma)$ γ ハスベテノ β_α ヨリ大キイカ又ハ然ラズ.

前者ノトキ $\beta < \gamma$. 後者ノトキ $\beta > \gamma$ 依テ Γ ノ極大性ヨリ $\beta \in \Gamma$ 且

$\beta\alpha \to \beta$ ナルコトハ明ラカ．本 $\beta < \gamma$ デアルカラ $\beta \in \overline{\Gamma_\alpha(\gamma)}$