OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Riemann 空間の上で定義された或種のベクトル空間に就て（II）
Author(s)	朝長, 康郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1948, 2(10), p. 293-299
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75232
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

98. Riemann空間の上で定義された或種のベクトル空間に就て(II)

朝長康郎

§3（第7号の談話69に続く） 今後は空間に捩れがないことを仮定する。即ち線素

$$dx^\lambda = \begin{cases} dx^i & (\lambda = i) \\ 0 & (\lambda = 0) \end{cases}$$

を任意の方向 $\underset{1}{d}x^i$, $\underset{2}{d}x^i$ に動かした時 次の関係が成立つとする。

(3.1) $$(\underset{2}{d}\underset{1}{d}x^\lambda + \Gamma^\lambda_{\mu i}\underset{1}{d}x^\mu \underset{2}{d}x^i) = (\underset{1}{d}\underset{2}{d}x^\lambda + \Gamma^\lambda_{\mu i}\underset{2}{d}x^\mu \underset{1}{d}x^i) = 0$$

換言すれば

(3.2) $$\Gamma^\lambda_{ij} = \Gamma^\lambda_{ji}$$

成分に分けると

(3.3) $$\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}, \qquad \Gamma^0_{jk} = \Gamma^0_{kj}$$

となる。故に（L8）の如く

$$\Gamma^i_{jk} = \left\{ {j \atop jk} \right\}$$

となるのは勿論である。

Riemann空間や共形接続空間に於てHolonomy群の性質から空間の構造を決定する研究が近年佐々木重夫博士 矢野健太郎博士等に依り大きな発展を見た。之等に就ては ⊙ 佐々木重夫 矢野健太郎「Holonomy群が任意次元の球を不変にするやうな標準共形接続空間の構造に就て」（「数学」第1巻第一号）

⊙ 佐々木重夫「共形接続幾何学」（河出書房）

等を参照されたい

我々のLnに於ても接続の係数 $\Gamma^\lambda_{\mu i}$ に依て 空間の各点に附随するn+1次元ベクトル空間（超球空間）を閉曲線に沿つて次々と重ねてゆけば 全様にHolonomy群と云のものを考へることが出来る。

§4 Holonomy群が一つの超球を不変にするLnの構造

(A) $$V^\lambda = \begin{cases} V^i & (\lambda = i) \\ 0 & (\lambda = 0) \end{cases}$$

の形の超球(即ち点)が固定される場合を先ず考へる.

(4.1) $DV^\lambda + dx^\lambda = dV^\lambda + \Gamma^\lambda_{\mu\kappa} V^\mu dx^\kappa + dx^\lambda = 0$

即ち 成分に分ければ

(4.2) $$\begin{cases} dV^i + \Gamma^i_{jk} V^j dx^k + dx^i = 0 \\ \Gamma^0_{ij} V^i dx^j = 0 \end{cases}$$

でなければならない.

dx^i は任意だから

(4.3) $$\begin{cases} \dfrac{dV^i}{dx^k} + \Gamma^i_{jk} V + \delta^i_k = 0 \\ \Gamma^0_{jk} V^j = 0 \end{cases}$$

が必要充分である. 即ち V^i は R_n のベクトルとしては定点通過ベクトル場を形成する, かいる R_n の構造は良く知られてゐるから略す.

次に超球

(B) $$V^\lambda = \begin{cases} 0 & (\lambda = i) \\ V^0 & (\chi = 0) \end{cases}$$

即ち各点 (χ^i) を中心とする超球が固定される場合を考へよう. 此の場合は

(4.4) $$DV^\lambda + dx^\lambda = \begin{cases} \Gamma^i_{0k} V^0 dx^k + dx^i = 0 & (\lambda = i) \\ dV^0 = 0 & (\chi = 0) \end{cases}$$

が dx^i の如何に不拘成立たねばならないから.

(4.5) $V^0 = c$ 一定.

(4.6) $\Gamma^i_{0k} V^0 + \delta^i_k = 0$

となる. 換言すれば

(4.7) $\Gamma^0_{ik} = g_{im} \Gamma^m_{0k} = C g_{ik}$ (C は常数).

此の場合注意すべきことがある. それは

[定理]. $\Gamma^0_{ij} = C g_{ij}$ (C = 常数) の時はそれに接する超球が其の超曲面に沿つて L_n の意味で展開された時いつも重ちるやうな超曲面は R_n の固有合同超曲面である.

[証明] 今 $\bar{R}_n$ の中の或る超曲面

$$x^i = x^i(u^1, \cdots u^{n-1})$$

の各点でこの曲面に接する超球

(4.8) $$V^\lambda = \begin{cases} f n^i & (\lambda = i) \\ f & (\lambda = 0) \end{cases}$$

(但し n^i は超曲面の法線ベクトルとする)

が 此の超曲面に沿つてしたの意味で展開された時、常に重なるとする。即ち超曲面に沿つて

(4.9) $$DV^\lambda + dx^\lambda = 0$$

が成立つとする。

従つて

(4.10) $$\begin{cases} d(f n^i) + \Gamma^i_{jk} f n^j dx^k + f \Gamma^i_{0k} dx^k + dx^i = 0 . \\ df + f \Gamma^0_{ij} n^i dx^j = 0 \end{cases}$$

(4.11) $$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^A} du^A \quad (A.B.C \text{ 等は } 1 \text{ から } n-1 \text{ 迄動く})$$

が du^A の如何に不拘成立つ。換言すれば

(4.12) $$\begin{cases} (a) \ \frac{\partial f}{\partial u^A} n^i + f\left(\frac{\partial n^i}{\partial u^A} + \Gamma^i_{jk} n^j \frac{\partial x^k}{\partial u^A} + \Gamma^i_{0k} \frac{\partial x^k}{\partial u^A} \right) + \frac{\partial x^i}{\partial u^A} = 0 \\ (b) \ \frac{\partial f}{\partial u^A} + \Gamma^0_{ij} f n^i \frac{\partial x^j}{\partial u^A} = 0 \end{cases}$$

而るに Riemann 幾何の超曲面論から

(4.13) $$\frac{\partial n^i}{\partial u^A} + \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} n^j \frac{\partial x^k}{\partial u^A} = - \frac{\partial x^i}{\partial u^B} H^B_{\ A}$$

であるし、又

$$\Gamma^i_{0k} = C \delta^i_k$$

であるから (4.12 a) から 次の2つの関係を得る。

(4.14) $$\frac{\partial f}{\partial u^A} = 0 \qquad f = \text{const}$$

(4.15) $$f(-H^B_{\ A} + C \delta^B_A) + \delta^B_A = 0$$

即ち

$$H^B_{\ A} = \frac{fC + 1}{f} \delta^B_A$$

右辺の係数は超曲面に沿つては常数だから、此の超曲面は R_n の固有全臍定曲面であることが分る

此の時 (4.12. b) は (4.14) から当然成立つ。 (3)

§5 次に

(C) $V^\lambda = \begin{cases} V^i & (\lambda = i) \\ V^0 & (\lambda = 0) \end{cases}$

即ち一般の位置にある超球が固定される場合は

(5.1) $DV^\lambda + dx^\lambda = dV^\lambda + \Gamma^\lambda_{\mu k} V^\mu dx^k + d\lambda^\lambda = 0$

であつて 成分に分ければ

(5.2) $\begin{cases} dV^i + \Gamma^i_{jk} V^j dx^k + \Gamma^i_{0k} V^0 dx^k + dx^i = 0 \\ dV^0 + \Gamma^0_{ij} V^i dx^j = 0 \end{cases}$

dx^i は任意だから

(5.3) $\begin{cases} \dfrac{\partial V^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{jk} V^j + \Gamma^i_{0k} V^0 + \delta^i_k = 0 & (a) \\ \dfrac{\partial V^0}{\partial x^k} + \Gamma^0_{jk} V^j = 0 & (b) \end{cases}$

でなければならない。 今

(5.4) $V_i = g_{ij} V^j$

と置けば (5.3.a) から 次式を得る。

(5.5) $\left(\dfrac{\partial V_i}{\partial x^k} - \Gamma^j_{ik} V_j\right) + \Gamma^0_{ik} V^0 + g_{ik} = 0$

i と k を入れ替へて (5.5) から引けば.

(5.6) $\dfrac{\partial V_i}{\partial x^k} - \dfrac{\partial V_k}{\partial x^i} = 0.$

即ち V_i は或るスカラー φ の勾配である.

(5.7) $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x^i} = V_i.$

こと (5.5) から次式を得る.

(5.8) $V^i\left(\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma^m_{ij} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x^m}\right) + \Gamma^j_i V^0 V^i + \dfrac{\partial \varphi}{\partial x^i} = 0$

又 (5.3.b) より

(5.9) $\dfrac{1}{2} \dfrac{\partial (V^0)^2}{\partial x^k} + \Gamma^0_{jk} V^0 V^j = 0$

(5.8) と (5.9) から

(5.10) $g^{ab}\left(\dfrac{\partial x^i}{\partial x^a}\right)\left(\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^k} - \Gamma^j_{ik} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x^j}\right) + \dfrac{\partial \varphi}{\partial x^k} - \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial (V^0)^2}{\partial x^k} = 0$

即ち.

(5.11) $\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(g^{ab}\frac{\partial\varphi}{\partial x^a}\frac{\partial\varphi}{\partial x^b}\right)+\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\varphi-\frac{1}{2}(V^0)^2\right)=0$

由て

(5.12) $$V^0=\sqrt{2\varphi+g^{ab}\frac{\partial\varphi}{\partial x^a}\frac{\partial\varphi}{\partial x^b}}$$

となる. 又(5.5)から $V^0\neq 0$ の点では

(5.13) $$\Gamma^0_{ij}=\frac{-g_{ij}-\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i\partial x^j}-\Gamma^m_{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial x^m}\right)}{\sqrt{2\varphi+g^{ab}\frac{\partial\varphi}{\partial x^a}\frac{\partial\varphi}{\partial x^b}}}$$

である. (5.7)と(5.12)から

(5.14) $$g_{ij}V^iV^j-V^0V^0=-2\varphi$$

即ち固定される超球 V^λ は $\varphi=\text{const}$ の超曲面上の各点から同じ共通切符距離にある.

以上を要約すると次の表の様になる.

	固定される超球	Γ^0_{ij} の形
A	$V^\lambda=\begin{cases}V^i & (\lambda=i)\\ 0 & (\lambda=0)\end{cases}$	$\frac{\partial V^i}{\partial x^j}+\Gamma^i_{mj}V^m+\delta^i_j=0$ $\Gamma^0_{mj}V^m=0.$
B	$V^\lambda=\begin{cases}0 & (\lambda=i)\\ V^0 & (\lambda=0)\end{cases}$	$\Gamma^0_{ij}=Cg_{ij}$ (Cは常数)
C	$V^\lambda=\begin{cases}V^i & (\lambda=i)\\ V^0 & (\lambda=0)\end{cases}$	$\Gamma^0_{ij}=\frac{-g_{ij}-\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i\partial x^j}-\Gamma^a_{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial x^a}\right)}{\sqrt{2\varphi+g^{ab}\frac{\partial\varphi}{\partial x^a}\frac{\partial\varphi}{\partial x^b}}}$

§6. 二つの超球が固定される L_n の構造

BとCが共に成立つ場合を考へる. 即ち. 各点 (x^i) を中心とする超球の他に更に超カー般の位置にある V^λ と云ふ超球が一つ固定される場合はどうか. 此の時は §4から

(6.1) $$\Gamma^0_{ij}=Cg_{ij},\qquad \Gamma^i_{0k}=C\delta^i_k.$$

であるから (5.3) (5.7) (5.12) から

$$(6.2)\begin{cases}(a) & \dfrac{\partial V^i}{\partial x^k}+\Gamma^i_{jk}V^j+C\,\delta^i_k V^0+\delta^i_k=0\\ (b) & V^i=g^{im}\dfrac{\partial \varphi}{\partial x^m}\\ (c) & V^0=\sqrt{2\varphi+g^{ab}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x^a}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x^b}}\end{cases}$$

である.

この際 $\varphi=\text{const}$ の超曲面は固有全脐超曲面であることが分る. それは, V^i は (6.2b) なら $\varphi=\text{const}$ の超曲面の法ベクトル n^i に比例するから.

$$V^i=\rho n^i$$

とおける. 又 $\varphi=\text{const}$ のパラメーター表示を

$$x^i=x^i(u^A)\qquad (A=1,\ldots,n-1)$$

とすれば (6.2a) から次の式を得る.

$$(6.3)\quad d(\rho n^i)+\Gamma^i_{jk}\rho n^j dx^k+(CV^0+1)dx^i=0$$

即ち.

$$(6.4)\quad n^i d\rho+\rho\left(-\frac{\partial x^i}{\partial u^B}H^B_{\cdot A}\right)du^A+(CV^0+1)\frac{\partial x^i}{\partial u^A}du^A=0$$

du^A は任意であるから, n^i と $\dfrac{\partial x^i}{\partial u^A}$ の係数を各0と置けば

$$(6.5)\qquad \rho=\text{const}\quad(\varphi=\text{const}\text{ の上で})$$

又が

$$(6.6)\qquad H^B_{\cdot A}=\frac{CV^0+1}{\rho}\delta^B_A$$

又 (6.2c) と (6.5) と

$$(6.7)\qquad \rho^2=g_{ij}V^iV^j=g^{ab}\frac{\partial\varphi}{\partial x^a}\frac{\partial\varphi}{\partial x^b}$$

から

$$(6.8)\qquad V^0=\text{const}\quad(\varphi=\text{const}\text{ の上で})$$

故に (6.6) から

$$(6.9)\qquad H^B_{\cdot A}=C'\delta^B_A\quad(C'=\text{const},\ \varphi=\text{const}\text{ 上で})$$

即ち $\varphi=\text{const}$ の超曲面は固有全脐超曲面である.

次に $\varphi=\text{const}$ の超曲面群の直交曲線は測地線である.

何者 $x^i=x^i(t)$ をかかる直交曲線とすれば次の様に書ける.

$$(6.10)\qquad V^i=\frac{dx}{dt}$$

而るに (6.2a) より

(6.11) $$\frac{dV^i}{dt}+\Gamma^i_{jk}V^j\frac{dx^k}{dt}+(CV^0+1)\frac{dx^i}{dt}=0$$

であるから (6.10) を代入して.

(6.12) $$\frac{d^2x^i}{dt^2}+\Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}+(CV^0+1)\frac{dx^i}{dt}=0.$$

之は測地線の方程式に他ならない・即ち此の場合 R_n は直線曲線が測地線である様な ∞^1 の固有全測超曲面を含む と云ふことになる.

(1948. 5. 10)