OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

| | |
|---|---|
| Title | Riemann 空間の上で定義された或種のベクトル空間に就て（III） |
| Author(s) | 朝長, 康郎 |
| Citation | 全国紙上数学談話会. 1948, 2(10), p. 299-301 |
| Version Type | VoR |
| URL | https://doi.org/10.18910/75233 |
| rights | |
| Note | |

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

# 99. Riemann 空間の上で定義された或る種のベクトル空間に就て(其1)

朝長康郎 (6.13)

## §7. Holonomy 群が二つの独立な超球 $V^\lambda$, $W^\lambda$ を固定する場合

此の時は

$$(7.1)\begin{cases}\text{(A)} & \dfrac{\partial V^i}{\partial x^k}+\Gamma^i_{jk}V^j+\Gamma^i_{0k}V^0+\delta^i_k=0, \quad \dfrac{\partial V^0}{\partial x^k}+\Gamma^0_{jk}V^j=0\\ \text{(B)} & \dfrac{\partial W^i}{\partial x^k}+\Gamma^i_{jk}W^j+\Gamma^i_{0k}W^0+\delta^i_k=0, \quad \dfrac{\partial W^0}{\partial x^k}+\Gamma^0_{jk}W^j=0\end{cases}$$

であるから 今Aを常数として

$$(7.2)\qquad X^\lambda = AV^\lambda+(1-A)W^\lambda$$

なる超球を造れば之又 Holonomy 群に固定される. 即ち.

$$(7.3)\qquad \frac{\partial X^i}{\partial x^k}+\Gamma^i_{jk}X^j+\Gamma^i_{0k}X^0+\delta^i_k=0, \quad \frac{\partial X^0}{\partial x^k}+\Gamma^0_{jk}X^j=0.$$

由て §5の結論が $X^\lambda$ にも適用されて, $X_i$ が勾配ベクトルとなり

$$(7.4)\qquad X_i = AV_i+(1-A)W_i = g^{ia}\frac{\partial}{\partial x^a}\{A\varphi+(1-A)\psi\}$$

但し

$$(7.5)\qquad V_i = g^{ia}\frac{\partial\varphi}{\partial x^a}, \quad W_i = g^{ia}\frac{\partial\psi}{\partial x^a}$$

とする. 又 (5.14) と同様に

$$(7.6)\qquad g_{\lambda\mu}X^\lambda X^\mu = -2\{A\varphi+(1-A)\psi\}+\text{const}$$

である. 即ち 点 $x^i$ から超球 $X^\lambda$ に至る共通の最短線は.

$A\varphi+(1-A)\psi=\text{const}$. で定る超曲面上では一定である. (7.1)で Aを変へれば $\infty^1$ の超球群が出来る. それ等は何れも Holonomy の群に固定される. 今其の中で任意の $R_n$ と交はるものが存在する場合即ち

(7.7) $g_{\lambda\mu}X^\lambda X^\mu = 0$

が或る $x^i$ の領域で満足される様な $X^\lambda = AV^\lambda + (1-A)W^\lambda$ が存在する場合を考へよう. (7.7) が成立つことは

(7.8) $g_{\lambda\mu}(AV^\lambda+(1-A)W^\lambda)(AV^\mu+(1-A)W^\mu)=0$

即ち A に関する次の二次方程式が実根を有つ場合である.

(7.9) $A^2\{g_{\lambda\mu}V^\lambda V^\mu+g_{\lambda\mu}W^\lambda W^\mu-2g_{\lambda\mu}V^\lambda W^\mu\}$

$+2A(g_{\lambda\mu}V^\lambda W^\mu-g_{\lambda\mu}W^\lambda W^\mu)+g_{\lambda\mu}W^\lambda W^\mu=0$

判別式を考へれば

(7.10) $(g_{\lambda\mu}V^\lambda W^\mu-g_{\lambda\mu}W^\lambda W^\mu)^2-(g_{\lambda\mu}W^\lambda W^\mu)(g_{\lambda\mu}V^\lambda V^\mu-2g_{\lambda\mu}V^\lambda W^\mu+g_{\lambda\mu}W^\lambda W^\mu)\geqq 0$ が或る $x^i$ の領域で成立つ場合である. Aを決めれば (7.8) は一つの超曲面を定める. この超曲面上では (7.6) から $A\varphi+(1-A)\psi=const.$ であるから其の法線が $x^i$ と比例する. 而し (7.7) から超曲面上の点から $X^\lambda$ 迄の共通切線距離は0であるから $X^\lambda$ はこの超曲面に接触する超球である. 又 $X^\lambda$ は, この超曲面に沿って焼消されても動かないから §4 で現れたものゞ今後, <u>W-超曲面</u> と呼ぶことにする. 其の方程式は (4.12) から

(7.11) $\begin{cases}\rho(-H^S{}_A+\varepsilon\Gamma^i_{jk}\xi^B_i\xi^R_A)+\delta^B_\lambda=0\\ \varepsilon\dfrac{\partial\rho}{\partial u^A}+\Gamma_{ij}\delta n^i\xi^j_A=0\end{cases}$

但 $x^i=x^i(u^A)$ を超曲面のパラメーター表示とし

$\xi^i_A=\dfrac{\partial x^i}{\partial u^A}$, $\xi^B_i=g_{ij}g^{AB}\xi^j_A$, $\varepsilon=\pm1$

とする. 即ち (7.10) が成立つ領域には $\infty$ の W-超曲面が存在する. その直線曲線は Aをパラメーターに選べば次の形における.

(7.12) $\dfrac{dx^i}{dA}\pi(A)=AV^i+(1-A)W^i$

(7.8) から

(7.13) $\pi(A)=\dfrac{AV^0+(1-A)W^0}{\dfrac{dS}{dA}}$

(但し, Sは曲線の弧長とする.) でなければならない.

(7.14) $$\begin{cases} \dfrac{dV}{dA}+\Gamma^{i}_{jk}V^{j}\dfrac{dx^{k}}{dA}+\Gamma^{i}_{0k}V^{0}\dfrac{dx^{k}}{dA}+\dfrac{dx^{i}}{dA}=0, & \dfrac{dV^{0}}{dA}+\Gamma^{0}_{ij}V^{i}\dfrac{dx^{j}}{dA}=0 \\ \dfrac{dW^{i}}{dA}+\Gamma^{i}_{jk}W^{j}\dfrac{dx^{k}}{dA}+\Gamma^{i}_{0k}W^{0}\dfrac{dx^{k}}{dA}+\dfrac{dx^{i}}{dA}=0, & \dfrac{dW^{0}}{dA}+\Gamma^{0}_{ij}W^{i}\dfrac{dx^{j}}{dA}=0 \end{cases}$$

が成立つから（7.12）を更に弧長Sをもって積分すれば.

(7.15) $$P\frac{\delta^{2}x^{i}}{dA^{2}}+R\frac{dx^{i}}{dA}+R\Gamma^{i}_{0k}\frac{dx^{k}}{dA}=V^{i}-W^{i}$$

の形になる. 但し.

$$\frac{\delta^{2}x^{i}}{dA^{2}}=\frac{d^{2}x^{i}}{dA^{2}}+\Gamma^{i}_{jk}\frac{dx^{j}}{dA}\frac{dx^{k}}{dA}$$

特に $\Gamma^{i}_{0k}=C\delta^{i}_{k}$ （$C$=定数）の場合は. W-超曲面は. 固有全測地曲面となるし. (7.14) と (7.15) から

(7.16) $$\frac{\delta^{3}x^{i}}{dS^{3}}+L\frac{\delta^{2}x^{i}}{dS^{2}}+M\frac{dx^{i}}{dS}=0$$

が導かれる. （ L, Mは或るSの函数 ）

以上を綜合すれば.

[定理] Holonomy群が2つの独立な定球 $V^{\lambda}$, $W^{\lambda}$ を固定する時. 若し(2K)の成立つ領域が在れば其の中には $\infty^{1}$ のW-超曲面が存在し. 其の直截三次は(7.15)の形になる. 特に $\Gamma^{0}_{ij}=Cg_{ij}$（$C$=定数）のときは $\infty^{1}$ の固有全測地超曲面が存在し其の直截曲線は(7.16)の形になる. 〔1948. 6. 10〕