



Title	Boole束の一定理
Author(s)	小笠原, 藤次郎; 佐々木, 右左
Citation	全国紙上数学談話会. 1948, 2(10), p. 301-302
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75234
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

100. Boole 束の一定理

小笠原義次郎・佐々木右左 (5.28)

可満足に於ける Birkhoff-Ward の予想は一般な形では解決されてゐないが、原子的のとき完備性を仮定すれば肯定されてゐる。茲ではこの仮定なしに云へる事を示さう。

〔定理〕 原子的な束 L の各元が唯一つの補元をもつとき、 L は Boole 束である。次の諸題の順に証明を進行する。

補題 1. $a < b$ ならば $a' \sim b \neq 0$

(証) $a' \sim b' = 0$ ならば、 $a \cup b \geq a' \cup a = 1$. 補元の一意性から $a = b$ となり矛盾。

補題2. $a \leq b$ でないなら, $a \wedge x = x$, $b \wedge x = 0$ なる原子元 x がある.

(証) $a \wedge b < a$ から $(a \wedge b)' \wedge a \neq 0$ (補題1). 従つて $x \leq (a \wedge b)' \wedge a$ なる原子元 x をとると, $a \wedge x = x$, $b \wedge x = x \wedge (a \wedge b)' \wedge a \wedge b = 0$

補題3 原子元 x に對し, $x' < a$ ならば $a = 1$

(証) $x \wedge a = (x')' \wedge a \neq 0$ (補題1.) 故に $x \leq a$. 従つて $a \geq x \vee x' = 1$

補題4. 原子元 x に對し $x \wedge a = 0$ ならば, $x' \geq a$.

(証) $x' \geq a$ でないとする. $y \leq a$, $y \wedge x' = 0$ なる原子元 y がある (補題2) 従つて $y \vee x' = 1$ (補題3)となり. 補題の一貫性から $x = y$ 故に $0 = a \wedge x = a \wedge y = y$ となり矛盾.

補題5. 原子元 x に對して, $x \leq a$ か $x \leq a'$ の何れかに限る.

(証) 結論を否定すると, $x' \geq a$, $x' \geq a'$ (補題4). 従つて $x \geq a \vee a' = 1$ となり矛盾.

補題6. 原子元 x に對し $x \leq a \vee b$ ならば, $x \leq a$ か $x \leq b$ かである.

(証) 結論を否定すると $x' \geq a$, $x' \geq b$ (補題4). 従て $x' \geq a \vee b \geq x$.

故に $x = x' \wedge x = 0$ となり矛盾.

今 $x \leq a$ なる原子元 x の全体からなる集合を A_a で表すと

補題7

(1) $a = b$ と $A_a = A_b$ は同値

(2) $A_{a'} = A_a^c$ (補集合)

(3) $A_a \vee b = A_a + A_b$

(証) 補題2, 5, 6. から

なくてはは Boolean 集合系に同型となつてそれ自身 Boolean 束である.

これで証明がすんだが, 補題5, 6の代りに次の補題の成立を云つてもよい.

(本並原 束論 p5 定理1)

補題 $a \wedge b' = 0$ ならば $a \leq b'$

(証) $a \leq b'$ でないとする. $x \leq a$, $b' \wedge x = 0$ なる原子元 x がある (補題2)

$b' \wedge x = 0$ 及び $b \wedge x = b \wedge a \wedge x = 0$ から $b \leq x'$, $b' \leq x'$ (補題4). 従つて $x' \geq b \vee b' = 1$ となり矛盾