



Title	連続幾何学の公理について
Author(s)	佐々木, 右左
Citation	全国紙上数学談話会. 1948, 2(10), p. 303-305
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75235
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

101. 連続幾何学の公理について

佐々木 右左 (6.4)

J. v. Neumann の連続幾何学は次の命題 (α) 及び (α*) (α) の双対的命題を示す。以下同様) を満たす完備可補束である。

(α) $\mathbb{N}$ が任意の超限順序数なるとき、 $\alpha < \beta < \aleph$ に對して

$a_\alpha \equiv a_\beta$ ならば

$$\left(\bigvee_{\alpha < \aleph} a_\alpha \right) \wedge b = \bigvee_{\alpha < \aleph} (a_\alpha \wedge b).$$

前田先生は要旨 1647 (第 256 号) で、完備束に於て (α) は下に述べる (β) と同義である事を示されたが、之についてもう少し考察したい。

$\mathbb{L}$ を完備束とす。有向集合 D の元 a を添字とする $\mathbb{L}$ の部分集合 $(a_\delta, \delta \in D)$ があつて $\delta_1 < \delta_2$ なるとき $a_{\delta_1} \leq a_{\delta_2}$ ならば $a = \bigvee_{\delta \in D} a_\delta$ として $a_\delta \uparrow a$ と置き、双対的に $a_\delta \downarrow a$ を定義する。

又 $\mathcal{U}_\delta \leq a_\delta \leq \mathcal{U}_\delta$, $\mathcal{U}_\delta \uparrow a$, $\mathcal{U}_\delta \downarrow a$ なる $\mathcal{U}_\delta, \mathcal{V}_\delta, a$ がある時

$$(\mathcal{U}) - \lim a_\delta = a \quad \text{と書く。}$$

〔定理〕 完備束 $\mathbb{L}$ に於て、次の三命題は同義である。

(α) 上述の命題

(β) $a_\delta \uparrow a$ ならば $a_\delta \wedge b \uparrow a \wedge b$ 。

(γ) $\mathbb{L} \leq \mathbb{L}$ なるとき、 S が任意の有限部分集合 S に對して、

$$\left(\bigvee_{a \in S} a \right) \wedge b = \bigvee_{a \in S} (a \wedge b) \quad \text{ならば}$$

$$\left(\bigwedge_{a \in S} a \right) \wedge b = \bigwedge_{a \in S} (a \wedge b)$$

(α) (β) $\rightarrow$ (γ) $\rightarrow$ (α) の順序に証明する。

(β) $\rightarrow$ (γ) 同様に示す。

(β) の成立しないやうな有向集合があるとする。其の中に最小の濃度を有するもの D がある。

有限有向集合に對しては明らかで (β) は成立つから D は無限集合である。

故にその部分有向集合の超限列 $\{D_\alpha\}$ が (β) して、次の性質を有するものが存在

する。(註文. 談話 1173 (第262号) 参照)

$$(i) \text{ 名 } D_\alpha \text{ の極限 } \overline{D_\alpha} < \overline{D}$$

$$(ii) \alpha < \beta < \Omega \text{ のとき } D_\alpha \subseteq D_\beta$$

$$(iii) D = \sum_{\alpha < \Omega} \overline{D_\alpha}$$

名 $\alpha < \Omega$ に対して (i) より

$$(1) \left(\bigvee_{\delta \in D_\alpha} a_\delta \right) \wedge b = \bigvee_{\delta \in D_\alpha} (a_\delta \wedge b) \quad (\alpha < \Omega)$$

然るに (ii) から $\alpha < \beta < \Omega$ に対して

$$\bigvee_{\delta \in D_\alpha} a_\delta \subseteq \bigvee_{\delta \in D_\beta} a_\delta$$

故に (1) を用いて

$$\bigvee_{\alpha < \Omega} \left(\bigvee_{\delta \in D_\alpha} a_\delta \right) \wedge b = \bigvee_{\alpha < \Omega} \left\{ \bigvee_{\delta \in D_\alpha} a_\delta \right\} \wedge b$$

故つて (1) 及び (iii) より

$$\left(\bigvee_{\delta \in D} a_\delta \right) \wedge b = \bigvee_{\delta \in D} (a_\delta \wedge b)$$

を得る。即ち D に対しても $a_\delta \wedge b \uparrow a_\delta \wedge b$ が成立つて不合理。

(β) $\rightarrow$ (γ) S の有限部分集合 S の全 D は包含関係を満たすとして有向集合を作り

$$a = \bigvee_{\delta \in S} a_\delta \quad a_\delta = \bigvee_{\delta \in S} a \text{ とすれば } a_\delta \uparrow a \text{ である。}$$

故に (β) より $a_\delta \wedge b \uparrow a \wedge b$ 。

然るに仮定により $a_\delta \wedge b = \bigvee_{\delta \in S} (a_\delta \wedge b)$ であるから (δ) が成立つ

(δ) $\rightarrow$ (α) $S = \{a_\alpha; \alpha < \Omega\}$ なる集合を考へれば容易に証明出来る (前田先生
前出談話参照)

(証明終り)

[注意1] 此の定理から連続幾何学を定義する為に、上の三命題の何れを取つて、その反対命題と共に、連続性の公理として採用してもよい事が分かる。

[注意2] (β) が成立つとき、

$\nu_\delta \uparrow a, \nu'_\delta \uparrow b$ ならば $\nu_\delta \wedge \nu'_\delta \uparrow a \wedge b$ は容易に証明出来 (G. Birkhoff)
Lattice theory p.30 参照) 又 $u_\delta \downarrow a, u'_\delta \downarrow b$ ならば当然 $u_\delta \wedge u'_\delta \downarrow a \wedge b$
であるから

(δ) $(0)\text{-}\lim a_\delta = a, (0)\text{-}\lim b_\delta = b$ ならば $(0)\text{-}\lim (a_\delta \wedge b_\delta) = a \wedge b$
が成立し、逆に (δ) $\rightarrow$ (β) となるから (β) と (δ) とは同義である。

(δ) 及び (δ^*) を満足する束を G. Birkhoff は位相束と呼んでゐる。

(同上 p. 30. 脚註) 従つて連続幾何学とは冗備・可商・位相・素束であると云ひ得る。

最後に親切なる御指導並びに御意見を賜つた前田先生及び小笠原兄に深甚な感謝の意を表したい。