



Title	環ノ右いである束
Author(s)	前田, 文友
Citation	全国紙上数学談話会. 1948, 2(10), p. 317-323
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75240
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

106 環ノ右いである束

(廣島文理大) 前田 文友

§1 右連続束ノ定義及ビ二三ノ性質ヲ述ベル.

定義 1.1 完備束 L ニ於テ有向集合 D ノ元 δ ヲ添字ニモツ L ノ元ノ集合.

$(a_\delta; \delta \in D)$ ガアルトキ, 任意ノ元 $b \in L$ ニ對シテ

$$a_\delta \uparrow a \quad \text{ナラバ} \quad a_\delta \wedge b \uparrow a \wedge b$$

ガ成立スルトキ L ヲ上連続束トイフ. 双対的ニ下連続束ヲ定義シ, 上連続ニシテ下連続ナル束ヲ連続束トイフ

(コノ連続束ノ定義ガ J. v. Neumann ノ連続幾何学ニ用イタモノト異ナルコトハ 本誌佐々木右左氏 “連続幾何学ノ公理ニツイテ” 参照)

補題 1.1 上連続束 L ニ於テ $S \subseteq L$ ナルトキ, S ノ任意ノ有限部分集合 V ニ對シテ,

$$V(a; a \in V) \wedge b = 0 \quad \text{ナラバ} \quad V(a; a \in S) \wedge b = 0$$

 デアル.

(証明) S ノ有限部分集合 V ノ全体 D ハ 集合論的包含ヲ順序トシテ有向集合デアル. $a_V = V(a; a \in V)$, $a_S = V(a; a \in S)$ トオケバ, $a_V \uparrow a_S$ デアル. シカレニ仮定ニヨリ $a_V \wedge b = 0$, $a_V \wedge b \uparrow a_S \wedge b$ デアルカラ, $a_S \wedge b = 0$ デアル.

定義 1.2 完備束 L ノ部分集合 S ガアルトキ, S ノ共通部分ヲモタナハ任意ノ部分集合 S_1, S_2 ニツイテ $V(a; a \in S_1) \wedge V(a; a \in S_2) = 0$ ナルトキ, S ハ独立系デアルト云イ. $(S)^\perp$ デアラフス.

S が独立系ナルトキ $\forall (a; a \in S) \exists V(a; a \in S)$ デアラフス

表現 __ 上連続系ニ於テ S が独立系ナルタメノ必要ニシテ充分ナル條件ハ S ノスベテノ有限部分集合が独立系デアルコトデアル。

(証) 必要コトハ明カデアル。次ニ S ノスベテノ有限部分集合ノガ独立系デアルトスル。 $S_1, S_2 \exists S$ ノ共通要素ヲモクナイ任意ノ部分集合トシ、 V_1, V_2 ヲ夫々 S_1, S_2 ノ任意ノ有限部分集合トスルトキハ 仮定ニヨリ $V_1 \wedge V_2$ ハ独立系デアルカラ

$$V(a; a \in V_1) \wedge V(a; a \in V_2) = 0$$

コレハ S_2 ノ任意ノ有限部分集合 V_2 ニ対シテ成立スルカラ 補題 1.1 ヨリ

$$V(a; a \in V_1) \wedge V(a; a \in S_2) = 0.$$

コレハ又 S ノ任意ノ有限部分集合 V_1 ニ対シテ成立スルカニ

$$V(a; a \in S_1) \wedge V(a; a \in S_2) = 0.$$

従ツテ S ハ独立系デアル。

補題 1.2 上連続可補束ニ於テ $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_i \leq \dots$ ナルトキ、

$$a_i = a_{i-1} \oplus b_i \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (\text{但し } a_0 = 0)$$

トオケバ $\bigvee_{i \in \mathbb{N}} a_i = \bigvee_{i \in \mathbb{N}} b_i$ デアル。

(証) $i \leq j$ ナラバ $b_i \leq a_i \leq a_j$ ナレバ $(b_i \vee \dots \vee b_{j-1}) \wedge b_j \leq a_{j-1} \wedge b_j = 0$ 故ニ $(b_1, \dots, b_{j-1}) \perp$ 従ツテ定理 1.1 ヨリ $(b_i; i = 1, 2, \dots) \perp$

$\bigvee_{i \in \mathbb{N}} a_i = \bigvee_{i \in \mathbb{N}} b_i$ ハ明カデアル。

補題 1.3 上連続ニ於テ $a_\delta \uparrow a$ $b_\delta \uparrow b$ ナラバ $a_\delta \wedge b_\delta \uparrow a \wedge b$ デアル。

[証] $\bigvee (a_\delta \wedge b_\delta; \delta \in D) \geq \bigvee (a_\delta \wedge b_\delta; \gamma \in D) = a_\delta \wedge b$ ナレバ $\bigvee (a_\delta \wedge b_\delta; \delta \in D) \geq \bigvee (a_\delta, b, \delta \in D) = a \wedge b$

他方 $\bigvee (a_\delta \wedge b_\delta; \delta \in D) \leq a \wedge b$ ナレバ $\bigvee (a_\delta \wedge b_\delta; \delta \in D) = a \wedge b$

定理 1.2 連続束 L ノ中心 Z ハ L ノ部分束トシテ完備ブーネ束デアル。

[証] 中山正氏著論 I p.15 ヨリ L ノ中心 Z ハ L ノ部分束トシテ完備ブーネ束デアル。
 $S \leq Z$ ナルトキ $\forall \exists S$ ノ任意ノ有限部分集合トシ、 $Z_\nu = \bigvee (z, z \in S)$

$a = \bigvee (z, z \in S)$ トスルバ、 $Z_\nu \uparrow a$ デアル。 $x, y \in L$ ニ對シテ

$$(x \wedge y) \vee Z_\nu = (x \vee Z_\nu) \wedge (y \vee Z_\nu)$$

ナレバ、補題 1.3 ヨリ $(x, y) \vee a = (x \vee a) \wedge (y \vee a)$ 他ノ分配式モ同様ニ成立ス

ルカ a ハ中立元デアル。

Z_v ノ中立元ヲ Z_v' トシ $Z_v' \leq b$ トスルバ、 $1 = Z_v \cup Z_v' \leq a \cup Z_v' + v$ バ
 $1 = a \cup b$ 、 $0 = Z_v \cap Z_v' \geq Z_v \cap b$ ナルバ $0 = a \cap b$ 、故ニ a ハ中立元ヲ
 モツカラ中心元デアル。

同様ニ $\wedge (Z; Z \in S)$ モ中心元デアル。従ッテ Z ハ L ノ部分束トシテ完備ぶ
 束デアル。

§2 次ニ環 R ノ右 $\mathcal{O}$ 束ニツイテ考ヘル。 R ハ単位元 1 ヲモツトハ限ラナ。

定理2.1 環 R ノ右 $\mathcal{O}$ 束、全体 $R_{\mathcal{O}}$ ハ集合論的包含ヲ順序トシテ上連続束
 デアル。コノトキ、 S ヲ $R_{\mathcal{O}}$ ノ任意ノ部分集合トスルトキハ $V(\alpha; \alpha \in S)$ ハ
 S 中ノ有限個ノ右 $\mathcal{O}$ 束 $(\alpha_i; i=1, 2, \dots, n)$ ヲトツテ $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$
 $(\alpha_i \in \alpha_i)$ ノ如クアラワサレル α ノ全体デアリ。 $\wedge(\alpha; \alpha \in S)$ ハ S 中ノ
 元ノ右 $\mathcal{O}$ 束ニ等シキ。

[証] 上記ノ関係ニヨリ $R_{\mathcal{O}}$ ガ完備束ヲ作ルコトハ明カデアリ。又 $R_{\mathcal{O}}$ ガ模束ナ
 ルコトモヨク知ラレテイル。次ニ $\alpha \in \alpha_i$ ナルトキ $\alpha \in \alpha_i \cap b$ トスルバ、
 $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ ナル $\delta_i (i=1, \dots, n)$ ガ存在スル。 $\delta_i \leq \alpha_i (i=1, \dots, n)$
 ナル δ_0 ヲトスルバ、 $\alpha \in \alpha_{\delta_0}$ 、他方 $\alpha \in b$ ナルバ、 $\alpha \in \alpha_{\delta_0} \cap b$ 、故ニ
 $V(\alpha_{\delta_0} \cap b; \delta \in D) = \alpha_{\delta_0} \cap b$ 、即チ $\alpha_{\delta_0} \cap b \uparrow \alpha \cap b$ 。

定理2.2 $R_{\mathcal{O}}$ 中ニ於テ $\alpha = V(\alpha_{\lambda}; \lambda \in I)$ ナルトキ、 α ノ任意ノ元 α ガ
 $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_n (\alpha_i \in \alpha_{\lambda_i})$

ノ如ク一意的ニアラワサレルタメニ必要ニシテ充分ナル条件ハ $(\alpha_{\lambda}; \lambda \in I) \perp$ ナ
 ルコトデアル。

(証) (i) 必要 I_1, I_2 ヲ I ノ共通部分ヲモクナイ任意ノ有限部分集合トス
 レバ、 $V(\alpha_{\lambda}; \lambda \in I_1) \cap V(\alpha_{\lambda}; \lambda \in I_2) = (0)$ デアル。故ニ定理1.1ヨリ
 $(\alpha_{\lambda}; \lambda \in I) \perp$ デアル。

(ii) 充分 α ノ元 α ガ

$$\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_n = \beta_1 + \dots + \beta_n (\alpha_i, \beta_i \in \alpha_{\lambda_i})$$

ノ如クアラワサレルトスル (但シ α_i, β_i ノ中ニハ 0 デアルモノモアル) シカル
 トキハ

$$\beta_1 - \alpha_1 = (\alpha_2 - \beta_2) + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)$$

左辺ハ α_1 二属ス。右辺ハ $\alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_n$ 二属スル。故ニ独立性カラ

$$\beta_1 - \alpha_1 = 0$$

$$\text{同様ニ } \alpha_i = \beta_i \quad (i=2, \dots, n)$$

定義 2.1 E ヲ環 R ノ零等元トスルトキ、 E テ生成サレタ右イデヤル $(E)_r$ デアラウス。同様ニ左イデヤル $(E)_l$ ヲ定義スル。 $(E)_r = \{ \sum \xi_i; \xi_i \in R \}$ デアル。

補題 2.2 $E, \{ \}$ ヲ R ノ零等元トスルトキ、 $(E)_r = \{ \}$ ナルタメノ必要ニシテ充分ナル条件ハ $\eta = E + E\chi(1-E)$ ナル $\chi \in R$ ガ存在スルコトデアル。

[証] V . *Philippian* 連続幾何学講義 II p. 13 Lemma 2.7 ト同一

定理 2.3 E ヲ環 R ノ零等元トスルトキ、 $(E)_r = V(\oplus \alpha_i; i \in I)$ ナラバ、 $(\alpha_i; i \in I)$ ノ中有限個ノモノ例エバ $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ヲ除イテハ $\{0\}$ デアツテ $\alpha_i \alpha_j (i=1, \dots, n)$ ニ對シテハ 次ノ性質ヲモツ零等元 $\varepsilon_i (i=1, \dots, n)$ ガ一意ニ定マル。

$$(1^\circ) \alpha_i \alpha_j = (\varepsilon_i) \alpha_j \quad (i=1, \dots, n)$$

$$(2^\circ) i \neq j \text{ ナラバ } \varepsilon_i \varepsilon_j = 0, \quad \varepsilon_i \varepsilon_i = \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i = \varepsilon_i \quad (i=1, \dots, n)$$

$$(3^\circ) E = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n$$

[証] $E \in V(\oplus \alpha_i; i \in I)$ デアルカラ定理 2.2 ヨリ一意ニ

$$E = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n \quad (\varepsilon_i \in \alpha_i)$$

ナル $\varepsilon_i (i=1, \dots, n)$ ガ定マル。周知ノ方法ニヨリ ε_i ハ零等元デアツテ

(1°) (2°) (3°) ヲ満足シ、 $(E)_r = V(\oplus_{i=1}^n \varepsilon_i)$ デアル。従ツテ $(\alpha_i; i \in I)$ ノ中 $\alpha_i (i=1, \dots, n)$ 以外ノモノハ $\{0\}$ デアル。

[注意 2.1] 定理 2.3 カラ R ガ正則環デアルトキハ ソノ主右イデヤル束 $\overline{R}_R$ ハ極大・極小条件ヲ充ストキ以外ハ、 R_R ノ部分束トシテ完備束デナイトコトガワカルナントナレバ、 $\overline{R}_R$ ガ R_R ノ部分束トシテ完備束デアツテ 極大条件ヲ充サナイトスレバ、 $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots$ ナル $\overline{R}_R$ ノ無限列が存在スル。 $\overline{R}_R$ 上ニ連続可備束デアレカラ補題 1.2 ヨリ $\bigvee_{1 \leq i < \infty} \alpha_i = \bigvee_{1 \leq i < \infty} \alpha_i$ ナル主右イデヤル $\alpha_i (i=1, 2, \dots)$

が存在シ、 $(E)_V = V$ 也、ナレ等元 E が存在スルカラ定理 2.3 = 矛盾スル。
 $\bar{R}_R$ ハ可換環デアアルカラ 極大条件ヲ充セバ極小条件モ充ス。

J. U. Neumann ノ通解幾何学ノ講義 IIニ於テ 次数 $n \geq 4$ ナル可換環
 R ノ正則環 R ノ左イデヤル環 $\bar{R}_R$ ニヨツテ同型ニ表現サレルガ、コノトキシガ
 左環ナラバ 一般ニハコノ完備性ハコノ同型表現ニヨツテ R_R ノ部分環トシテ
 $\bar{R}_R$ ニ於テハ保タレナイコトガ以上ノコトカラワカル。

§3. 次ニ(1)デヤル環 R_R ノ中心ニツイテ考エル。

定義 3.1 環 R ノスベテノ元 ξ ニ對シテ $\alpha\xi = \xi\alpha$ ナルガ如キ R ノ元 α ノ全
 体 $\mathcal{Z}$ ヲ R ノ 核 トイフ。 E ヲ $\mathcal{Z}$ ニ属スル等号トスレバ、 $(E)_V$ ハ両側イデヤ
 デ $(E)_V = (E)$ デアル。コレヲ (E) ニデアラフス。

定義 3.2 環 R ノ部分環 $(R_\lambda; \lambda \in I)$ ガアツテ。

(1°) $\xi \in R$ ニ對シテ一意的ニ有限個ノ $R_\lambda; (\lambda = 1, \dots, n)$ ノ元 ξ_i ガ定マリ

$$\xi = \xi_1 + \dots + \xi_n$$

(2°) $\lambda \neq \mu$ ナルトキ $\xi \in R_\lambda, \zeta \in R_\mu$ ナラバ $\xi\zeta = \zeta\xi = 0$ ナルトキ
 R ハ $(R_\lambda; \lambda \in I)$ ノ直和デアルトイフ。

R = ハ (1) ト R トノ分解以外ニ直和分解が存在シナイトキハ R ハ 既約 デアル
 トイフ。

定理 3.1 環 R ガ $(R_\lambda; \lambda \in I)$ ノ直和デアルトキハ R_λ ハ R ノ両側イデヤ
 デアツテ、 $R_R =$ 於テ

$$R = V(\oplus R_\lambda; \lambda \in I) \quad (1)$$

デアル。逆ニ両側イデヤル $(R_\lambda; \lambda \in I)$ ニ對シテ (1) ガ成立スルトキハ、 R ハ
 $(R_\lambda; \lambda \in I)$ ノ直和デアル。

[証] (i) R ガ $(R_\lambda; \lambda \in I)$ ノ直和デアルトスル。 $\xi \in R$ ナラバ

$$\xi = \xi_1 + \dots + \xi_n, \quad \xi_i \in R_{\lambda_i} \quad (i = 1, \dots, n)$$

ノ如ク一意的ニアラワサレル。 $\zeta \in R_\lambda$ トスレバ、

$$\xi\zeta = \begin{cases} \xi\zeta_i & \lambda = \lambda_i \text{ ナルトキ} \\ 0 & \lambda \neq \lambda_i \text{ ナルトキ} \end{cases}$$

故ニ $\xi\zeta \in R_\lambda$ ナレバ R_λ ハ右イデヤルデアル。同様ニ R_λ ハ左イデヤルデア

ル。定理 2.2 から $R_R = \text{右モットキ}$ $R = V(\{e_\lambda; \lambda \in I\})$ デアル

(ii) 逆ニ両側 $\cap$ である ($\{e_\lambda; \lambda \in I\}$) ニ對シテ (i) が成立スルトキハ 定理 2.2 から、定義 3.2/(1') が成立スル。次ニ $\xi \in R_\lambda$ $\zeta \in R_\mu$ ($\lambda \neq \mu$) ナラバ $\xi\zeta \in R_\lambda$, $\xi\zeta \in R_\mu$ ナレバ $\xi\zeta = 0$ 。同様ニ $\zeta\xi = 0$ 。

〔注意 3.1〕 定理 2.3 より環 R が 1 モットキハ、 R は有限個ノ両側 $\cap$ であるノ直和ニシテ分解デキナイ。

定理 3.2 環 R が 1 モットキハ R の右 $\cap$ である $\mathcal{C}$ ニツイテ、次の三命題 (α) (β) (γ) は同義デアル。

(α) $\mathcal{C}$ は R_R の中心元デアル。

(β) R の核心 $\mathcal{C}$ ニ属スル幂等元 ε がアツテ $\mathcal{C} = (\varepsilon)_*$ デアル。

(γ) $\mathcal{C}$ は R_R - 於テ補元 $\mathcal{C}'$ のヲモチ、 $R = \mathcal{C} \oplus \mathcal{C}'$ は R の直和分解デアル。

コノトキ、 $\mathcal{C} = (\varepsilon)_*$ ナルガ如キ幂等元 ε は一意ニ定マル。

〔証〕 (α) $\rightarrow$ (β) : $\mathcal{C}$ が R_R の中心元ナルトキハ、 $\mathcal{C}$ は唯一ツノ補元 $\mathcal{C}'$ のヲモチ、 $R = \mathcal{C} \oplus \mathcal{C}'$ デアル。故ニ定理 2.3 より $\mathcal{C} = (\varepsilon)_*$ ナルガ如キ幂等元 ε が一意ニ定マル。從ツテ補題 2.1 よりスベテノ $\chi \in \mathcal{C}$ ニ對シテ $\varepsilon\chi(1-\varepsilon) = 0$ デアル。同様ニシテ $\mathcal{C}' = (1-\varepsilon)_*$ は唯一ツノ補元ヲモツカラ、スベテノ $\chi \in \mathcal{C}'$ ニ對シテ $(1-\varepsilon)\chi\varepsilon = 0$ デアル。故ニスベテノ $\chi \in \mathcal{C}$ ニ對シテ $\varepsilon\chi = \varepsilon\chi\varepsilon = \chi\varepsilon$ ナレバ $\varepsilon \in \mathcal{C}$ ニシテ $\mathcal{C} = (\varepsilon)_*$ ナル ε は一意ニ定マル。

(β) $\rightarrow$ (γ) : 定理 3.1 より $R = (\varepsilon)_* \oplus (1-\varepsilon)_*$ は R の直和分解デアル。

(γ) $\rightarrow$ (α) : 定理 3.1 より $\mathcal{C}$ $\mathcal{C}'$ は両側 $\cap$ であるデアツテ、定理 2.3 より $\mathcal{C} = (\varepsilon)_*$, $\mathcal{C}' = (1-\varepsilon)_*$ ナルガ如キ幂等元 ε が存在スル。右ヲ任意ノ右 $\cap$ であるトスレバ、 $\alpha \in \mathcal{C}$ ナルトキ、 $\alpha = \alpha\varepsilon + \alpha(1-\varepsilon)$ ニ於テ $\alpha\varepsilon \in \mathcal{C}$, $\alpha\varepsilon \in \mathcal{C}'$ ナレバ、 $\alpha\varepsilon \in \mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$ 。同様ニ $\alpha(1-\varepsilon) \in \mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$ 。故ニ $\mathcal{C} = (\mathcal{C} \cap \mathcal{C}') \oplus (\mathcal{C} \cap \mathcal{C}')$ 。從ツテ $\mathcal{C}$ は R_R の中心元デアル。(J. Neumann 連続幾何学講義 I, p. 8, Lemma 1.2 より)

定理 3.3 環 R が 1 モットキ、次の三命題 (α), (β), (γ) は同義デアル。

(α) $\mathcal{C}$ は既約デアル。

(β) R_R は既約デアル。

(γ) R の核心ニ属スル幂等元ハ 0 ト 1 ト ダケデアル。

〔証〕 定理3.2カラ明カデアレ.

〔注意3.2〕 R ガ正則環ナルトキハ R_Q ノ中心元ハ $\overline{R}_Q$ ノ中心元デアルカラ. 定理3.2, 定理3.3ニ於テ R_Q ノ代リニ $\overline{R}_Q$ ヲオイタ定理ガ成立スル. コレラハ

J. Glimmerman 連続幾何学講義Ⅱ p.12-14ニ出テイル.

〔注意3.3〕 注意2.1ト同様ナ理由デ. 環 R ガ 1 ヲモツトキハ. R_Q ノ中心 Z_R ガ R_Q ノ部分乗トシテ完備束デアルナラバ. Z_Q ハ極大極小条件ヲ充ス.

〔注意3.4〕 環 R ガ 1 ヲモツトキ. 上連続束 R_R ガ更ニ下連続束デアルナラバ 定理1.2カラ R_R ノ中心 Z_R ハ R_Q ノ部分乗トシテ完備束デアルカラ. 注意3.3ヨリ Z_Q ハ極大 極小条件ヲ充ス.