



Title	下半もぢゅS群ニツイテ Ⅱ
Author(s)	伊藤, 昇
Citation	全国紙上数学談話会. 1948, 2(10), p. 323-327
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75241
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

107 下半もぢゆS群ニツイテ II

(名大) 伊 藤 昇

○ 要旨 下半もぢゆS群ニツイテノ定理4及ビソノ系ハ全然思イ違イデシタカラ
取消シマス。(阪大佐藤氏ノ御注意ニヨル) シタガツテ *conformal* ナ群ハ
何時下半もぢゆS群ニナルデアロウカト イフ問ガ出テ來ルワケデスガ、ソレガ一般
ノ場合ニハ上手イ條件が見ツカラ ナイノデ唯特別ノ場合ダケシカ進ベラレナイノハ
残念デス。

1. *Conformal* ナ群ハ勿論可解群デアリ又巾零群ハ下半もぢゆS群デスカラ、我
々ハ巾零群デナイ可解群ニ興味ヲ持チマス。簡單ノ爲ソノ族ナ群ヲ以上S群ト総稱
シマス。S群ニ対シテ次ノ概念ヲ導入シマス。

[定義1- *family* 1ノS群トハスベテノ最部分群ガ巾零ナルモノヲ言フ。
family K ノS群トハ極大部分群ガ巾零群ナルカ又ハ高々 *family* $K-1$ ノS群
デ且少ナクトモ一ツノ極大部分群ハ丁度 *family* $K-1$ ナルモノヲイフ。

family 1ノS群ノ構造ハ良ク知ラレテ居リマス(K. Iwasawa (1)). ソ
レヲ依リバ *induction* デ次ノ定理ハ直チニ証明サレマス！

[定理1] *family* K ノS群ノ位数ハ相異なる素因数数ヲ高々 $K+1$ 個シカ有シナイ。

[証明] $r=1$ ナル時ハ(1)ニヨツテ保証サレマス。ソコデ若シソノ族ナ群ガ
 $K+r$, $r \geq 2$ 個ノ相異なる素因数数ヲ有スレバ即チ $g = p_1^{e_1} \cdots p_{K+r}^{e_{K+r}}$ ナラバ、

$q/p_i^{e_i}$ ナル位数ノ部分群ハ存在スルガ (P. Hall) ソノ中ニ S 群ナルモノガアル ソレハ family $\leq K$ ダカラ induction ニヨリ高々 $(K-1)+1=K$ 個シカ相異ナル素因数ヲ有シナイ。

[Koliankowsky (2)] ノ非可解群ニ関スル結果ハ S 群ノ場合ニモ大体成立シマスガ (定理 1 カラ スグワカリマス) ソノ仕方ハ直交的デス。

S 群 G ノ位数ガ n 個ノ相異ナル素因数ヲ有スレバソノ family $\geq n-1$ 即チ G ハ本質的ナ非可解群ヲ少クトモ $n-2$ 個有スル。

サテ (1) ニヨレバ family 1 ノ S 群ノ位数ハ丁度 2 個ノ相異ナル素因数ヲ有シマスカラ定理 1 ニ基ツイテ次ノ概念ヲ導入シマス。

[定義 2] family K ノ S 群デソノ位数ガ相異ナル素因数ヲ丁度 $K+1$ 個有スルモノヲ regular ナ S 群ト云フ。

一方 O. Ore (3) ハ 位数 $g = p_1^{e_1} \dots p_r^{e_r}$ $p_1 > m > p_r$ ナル群 G ガ 位数 $h_i = p_1^{e_i} \dots p_i^{e_i}$ ($i = 1, 2, m$) ナル正規部分群 H_i ヲ有スル時 dispersible 下言ソテ居リマスガ ソレヲ少シク拡張セテ

[定義 3] $(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \dots & r \\ n_1 & n_2 & \dots & n_r \end{smallmatrix})$ ヲーツノ番号トシマストキニ $j_1, j_2, \dots$ ノ意味デ dispersible テアル場合ニソノ様ナ G ノコトヲ generalized dispersible ト呼ビマス。

ソウシマス

[定理 2] regular ナ S 群ハ generalized dispersible テアル。

[証明] $K=1$ ナル時ハ (1) ニヨレバ正シイ G ガ素数指数 p_i ノ正規部分群 H_i ヲ有スルコトハ自明デスカ。コノデ $e_i = 1$ ナラバ H_i ハ可解群ナルカ又ハ family $K-1$ ノ S 群デアリ 又 $e_i \geq 2$ ナラバ H_i ハ可解デスカラ induction ニヨッテ定理ヲ証明サレタデス。

サウニ

[定理 3] regular ナ S 群デハ少クトモーツ N_p キ H ナル如キ巡回群デアアル S_p ガ存在スル。

[証明] $K=1$ ナル時ハ (1) ニヨル。サテ $p_i^{e_i} p_j^{e_j}$ ($i \neq j$) ナル位数ノ部分群 H_{ij} ノ S 群デアアルモノハ存在シマスガ、ソレガ若シ family 1 ナラ定理ハ成立シ。

ソウテナケレバ 何ハ少クトモ *family* $K+1$ トナツテ仮定ニ反シマス。

2 以下 *conformal* ナ S 群ヲ考ヘ。ソレヲ CS 群ト曰フシマス。証明" 下半
モウチ S 群ニツイテ。ノ定理 1. 2. 3 ハ *conformal* ナ群ニツイテ成立スルモノ
デス。尚 (3) 参照。

最初ニ *family* 1 ノ CS 群ノ構造ヲシラベマス。

[定理 4] *family* 1 ノ CS 等 Q ハ次ノ構造ヲ有シ 逆ニソノ族ナモノ又
family 1 ノ CS 群ニナリマス。ソノ位数ヲ q トスレバ $q = p q^{\beta}$, $p > q$.
 $q \nmid p$ $N_0 = S_0 = \{G\}$, $S_p \times \{Q^2\}$.

即チソノ族ナ群ハ所謂 *type A* ノ群ニナリマス。G. Miller-H. Moreno (4)
[証明] 必要ナダケマツテ置キマス。(1)ニヨレバ *family* 1 ノ S 群ハ及ニ構造ヲ
有シマス。 $q = p^{\alpha} q^{\beta}$, $q \nmid p$, $S_p = \{Q\} < Q^2$, $S_p \times \{Q^2\}$, Q/S_p *type*
A. $S_p \times S_q$. *conformal* ノ仮定ヲ $p > q$ トナリマス。サテ (5)ニヨ
シバ S_p/S_p ハ Q/S_p ノ極小正規部分群ニナリマスガ *conformal* ノ仮定ノ
下デハ S_p/S_p ノ位数ハ p デナケレバナリマセンガ、ソレハ結局 $\alpha = 1$ ナルコトヲ
示シマス。

サテソレハ下半モウチ S 群デモアリマス。即チ *family* 1 ノ S 群デハ *con-*
formal ナラバ下半モウチ S 群デアリマス。

定理 4 カラ *induction* デ

[定理 5] *family* K ノ CS 群 Q ノ位数ヲ $q = p_1^{e_1} \cdots p_n^{e_n}$, $p_i > p_{i+1} > p_n$
トスレバ $e_i \leq K$.

[証明] $K=1$ ノ時ハヨイカラ $K > 1$ トシ $K-1 \Rightarrow K$ ヲ証明スル。極大部分
群ノ位数ニ *family* $K-1$ ノモノガアル。ソノ位数ハ q/p_i デスガ $i=1$ ナラ
induction デ $e_i - 1 \leq K-1$, $i \neq 1$ ナラ $e_i \leq K-1$

サテ *regular* ノ仮定ヲ入レル時 *induction* ヲ使ウ爲ニ先ツ。

[定理 6] *regular* ナ CS 群ノ S 部分群ハ *regular* デアル。

[証明] $K=1$ ナラ自明。極大部分群ノ位数ハ q/p_i デスカラ $e_i > 1$ ナラソ
ノ S 部分群 $e_i = 1$ ノ時 S 部分群デナケレバ。ソレハ *family* $K-1$ デスカラ
regular。以上。定理 6 ニ基ザイテ。

【定理7】 *regular* な CS 群 $\mathcal{H}$ は $S_p \vee$ 巡回群 $\mathcal{H}$ である。従って *metacyclic* になりマス。 [逆 = $S_p \vee$ *cyclic* ならば *dispersible* になりマス]

【証明】 極大部分群 $\mathcal{H}$ の力は *family* $K-1$ のモノが存在スル。 ソノ位数 q/p_i ソノとき $e_i = 1$ となるカラ定理 $\mathcal{H}$ の *induction* で成立スル。

【定理8】 *regular* な CS 群 $\mathcal{H}$ は $e_i = 1$ である。

【証明】 極大部分群 $\mathcal{H}$ の力は *family* $K-1$ のモノがある。 ソノ位数 q/p_i ソノとき $e_i = 1$ である。 $c = 1$ ならばヨイ。 ソウデナケレバ *induction* がキク。

【定理9】 *regular* な CS 群 $\mathcal{H}$ は S_2 を除イテハ $S_{K^2-1} = P_K$

【証明】 極大部分群 $\mathcal{H}$ の力は *family* $K-1$ のモノがある。 ソノ位数 q/p_i ソノとき $e_i = 1$ である。 *induction* がキク。 最後ニ

【定理10】 Z_∞ の $\mathcal{H}$ の中心 $\mathcal{H}$ の 4 昇中心列ノ終点トスレバ $\mathcal{H}/Z_\infty$ が *conformal* ナコト $\mathcal{H}$ が *conformal* ナコトハ等シイ。

【証明】 $\mathcal{H}/Z_1$ が *conformal* ナラ $\mathcal{H}$ が *conformal* ナ言エバヨイ。 $\mathcal{H}$ の $\mathcal{H}$ トスレバ $\mathcal{H} > Z_1$ ナラ仮定がキキ $\mathcal{H} \leq Z_1$ ナラ $\mathcal{H} > \mathcal{H}$ トナル。 アトハ *induction*。

【定理11】 中心ヲ有シナイ CS 群 $\mathcal{H}$ が *family* K ナラ。 ソノ 位数 q ノ素因数ノ個数ハ $P(q) = K+1$ 。

【証明】 $K=1$ ナラヨイ。 定理ヲ否定スレバ 1 ト異ナル極大部分群ノ中心ハキイナル。 ソウスルト $\mathcal{H} = S_1 M_1$, $S_1 \cap M_1 = 1$, M_1 ノ中心ヲ $\mathcal{H}$ トシ。 又 $\mathcal{H}_1$ ノ素数 p_i ノ部分群 $\mathcal{H}_1$ ツツデシリテ R トスレバ $S_1 R$ ハ CS 群。 サラニコレガ *family* 1 ナラ $e_i = 1$ ソウデナケレバ *family* 1 ノ部分群ヲトレバ ソノ 位数ハ $p_i p_i$ デアル。 ソウスルト $\mathcal{H}$ の *family* ハ $K = f(q) - 1$ デナケレバナラヌガ。 仮定カラ $f(q) \geq K+2$ 。 コレハ矛盾。

【定理12】 定理11 ノ群ガ *regular* ナラバ $q = p_1 \cdots p_r$ 。

3. 以下、下半もどゆS群ヲ考察シマス。 最初ニ定理10 ト同様ニ。

【定理13】 CS 群 $\mathcal{H}$ が下半もどゆS群ナルタメノ必要條件ハ $\mathcal{H}/Z_\infty$ が下半もどゆS群カレコトデアル。

【証明】 $\mathcal{H}/Z_1$ 下半もどゆSナラ $\mathcal{H}$ 下半もどゆSナ言エバヨイ。 *induction*

ヲ使ヒバ、極大部分群ニツイテヤレバヨイ。更ニ q ノ位数ニツイテ *induction* ヲ使フ $q \geq 2$ トシ、 q_1, q_2 トシ、 q_1, q_2 ガソレラノ極大部分群ナルコトヲ言エバヨイガ [3]ニヨレバ $q_2 = q_1^2$ トシテヨイ。 $q_1 > 2$ ナラ明白デアリ、 $q_1 = 2$ ナラ $q_1 < q$ トナル。

ソコテ定理11 群ニツイテ下半もどち S ナル爲ノ必要條件ヲ求めレバヨイノデスガ、今ノ所一寸分リマセソノデス。結局前定理ニ依テル如ク部分群ノ共通ナ極大部分群ノニツテ取レバ、ソレラノ共通部分ガソレラノ極大部分群ニナル爲ノ必要條件ヲ求めレバヨイノデスガ、定理12ノ群ニツイテハ

[定理14] 定理12ノ群ガ下半もどち S ナル爲ノ必要條件ハ V_i ニ對シテ系 Q_i ツノ $j_1, \dots, j_i$ ガ存在シア V_{P_i}, P_{j_i} ナル位数ノ部分群ガ S 群ニナルコトデアル。ソノ j_i ニ對シテダケ

[証明] 必要：ソウデナケレバ、 $P_i, P_{j_1}, P_{j_2}, \dots, P_{j_i}$ ナル位数ノ部分群ヲ考ヘ $S_i, S_{j_1}, S_{j_2}, \dots, S_{j_i}$ ノ生成元ヲ適當ニ $\{A\}, \{B\}, \{C\}$ ト取レバ $\{B, C\} \in A, \{B^A, C^A\} = 1$ トナリマス。

充分、極大部分群ニツイテノミ見レバヨイガ、ソレモ明白デアリマセウ。サラニスガ分ルコトハ

[定理15] 定理11ノ群デリノ位数ガ $q = p q^\beta$ ナルモノガ下半もどち S デアル爲ノ必要條件ハ $\beta = 1$ ナルコトデアル。

アトハ証明ニナル許リデス。

以上

[1] Proc. Phys.-Mat Soc. 1941

[3] Duke. 1939

[2] Sbornik 1946

[4] Transaction 1903