



Title	完全正則のビコムパクト擴大
Author(s)	武隈, 良一
Citation	全国紙上数学談話会. 1948, 2(11), p. 331-334
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75244
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

110. 完全正則空間のヒコムパクト拡大

小樽經典 武 隈 良 一 (1943. V. 21)

空間 R のヒコムパクト拡大 βR としては著名な二つの空間即ち *Wallman* の wR 空間と *Cech* の βR 空間とがある。前者は R が T_1 空間にして wR も T_1 空間。後者は R が完全正則空間にして βR は正規空間である。若し R が正規ならば wR と βR とは一致するが R が完全正則なるとき両者は異なり次の関係が成立する。

定理 A. αR から βR の上へ R の点を不変に保つやうな連続写像 α が存在する。

この定理の証明を小松氏が述べられてますが(紙上談話会第2回第8号)

Zerlegungsraum (分解空間) の理論を使つて *Alexandroff* (*Recueil Math.* 5 (47) 1939) が証明したものを以下に述べて見る。これは原文がロシア語

* *On the Theory of bicompact Extensions of topological Spaces.*
Comptes Rendus, URSS. 1943.. V 38

や語なので余り知られてないと思ひ紹介の筆をとる次第。以下原文から直接に、

§ 1

先づ Π 空間 Π のハウスドルフ分解^{*} (*Zerlegung*) P とは Π を互に相交はらぬ閉集合 (之を P の元と呼ぶ) の和に分解したとき その二つ A, A' に対して $P \supset A, P \supset A'$ なる如き互に相交はらぬ閉集合 (即ち A, A' の近傍) が見出されるものをいふ。こゝに P, P' は分解 P の元の和である。

今與へられた Π 空間 Π の凡てのハウスドルフ分解 P_α を考へそれから作られる $A_\alpha = \Pi \cap A_\alpha$ なる型の凡ての空ならざる閉集合族 P_0 を考へやう。こゝに共通部分の記号 Π は空間 Π の各ハウスドルフ分解 P_α から一つの元を取出してつくつた積を表はす、然るとき P_0 が又ハウスドルフ分解になることが容易に証明される。而てこの P_0 は極小ハウスドルフ分解である。極小とは他の凡てのハウスドルフ分解の再分割になつてゐることを意味する、即ち他のハウスドルフ分解の元は P_0 の元のいくつかの和になつてゐる。

今分解 P の元を点と考へたときその点全体の作る空間を分解空間 Z_P と名付けやう。空間 Z_P は分解 P がハウスドルフなるとき而てこのとき Z_P のみハウスドルフである。^{**} 各点 $\alpha \in \Pi$ にこの点を含む分解 P の元を對應させると Π の Z_P の上への連続寫像 f_P を得る。分解 P_0 に對應する空間 Z_{P_0} を Π_{f_0} と名付け Π の Π_{f_0} の上への寫像を簡潔のために f_0 で表はす。然るとき次の定理が成立する。

定理 1 ハウスドルフ空間 Π_{f_0} は Π の連続像である。而て Π の連続像を表はす凡てのハウスドルフ空間は Π_{f_0} の連続像として表はし得る。尚 Π がコンパクトならば Π_{f_0} も又コンパクトである。

§ 2

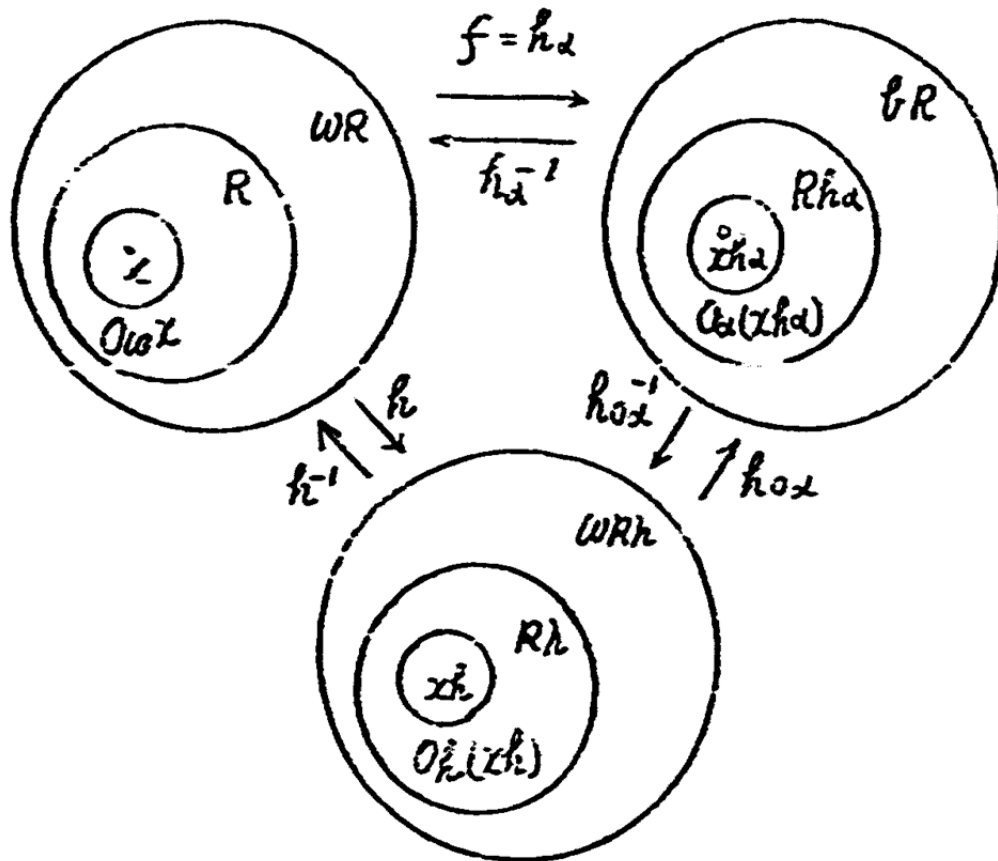
さて R を完全正則空間としやう。 Π を ωR にとつたときコンパクトハウスドルフ空間 $\Pi_{f_0} = \omega R_{f_0}$ を考へることとする。

定理 2 空間 ωR の空間 ωR_{f_0} への寫像 f_0 により ωR の部分空間 R に値相

* Alexandroff-Hopf. Topologie. I. Kap. I §5. §6.6 Kap. II §2
** Alexandroff-Hopf Topologie I. S. 70 参照

的に同像される。

証明 R は完全正則なる故 R のピコムバクト拡大 ℓR は存在する。 ωR の ℓR の上への連続写像 $f \in R$ の凡ての点を不変に保つものを ωR の $\ell R = Zp_\alpha$ の上への写像 h_α と考える。写像 h_α は R の上で位相的なるを以て分解 p_α の元は R の点を一点以上含まない。このことは極小分解 p_0 の元に対してても成立するので ωR の $\omega R h_\alpha$ の上への連続写像 f は R の上では一対一の写像になる。



$\omega R h_\alpha$ の部分空間 $R h_\alpha$ を写像 h_α による R の像とし $x \in R \subseteq \omega R$

$$x h_\alpha = h_\alpha(x) \in R h_\alpha \subseteq \omega R h_\alpha$$

$$x h_\alpha = h_\alpha(x) \in R h_\alpha \subseteq Zp_\alpha$$

とす。 ωR に於て任意の近傍 $O_{\omega}x$ を取出すとき $R h_\alpha$ から R の上へ定義された位相写像 h_α^{-1} により $h_\alpha^{-1}(R h_\alpha \cdot O_\alpha(x h_\alpha)) \subseteq O_{\omega}x$ なる如き点 $x h_\alpha$ の近傍 $O_\alpha(x h_\alpha)$ を取出すことが出来る。空間 $\omega R h_\alpha \subseteq Zp_\alpha$ の上への連続写像 $h o \alpha$ により

$$h o \alpha(R h \cdot O_h(x h)) \subseteq R h_\alpha O_\alpha(x h_\alpha)$$

なる近傍 $\omega R h_\alpha$ に於ける点 $x h$ の近傍 $O_h(x h)$ を得。故に、

$$h_{\alpha}^{-1} h_{\alpha\omega} (Rh \cdot Oh(xh)) = O\omega x$$

而て $h_{\alpha}^{-1} h_{\alpha\omega} = (h_{\alpha\omega}^{-1} \cdot h_{\alpha})^{-1}$ は h^{-1} と一致する。

$Rh \cdot Oh(xh)$ は Rh に関して点 $xh \in Rh$ の近傍なるを以て h^{-1} は Rh の R 上への連続寫像なることが証明された。Q.E.D

今点 $x \in R \leq \omega R$ とその像 $xh \in Rh \leq \omega Rh$ 即ち点 x を含む分解 P_0 の元とを同一視することによつて $R = Rh$ を ωRh の部分空間と考へることが出来る。

定理3 ωRh は $P = Rh$ のコンパクト拡大である。

證明 空間 ωRh の凡ての開集合は R の開集合 Γ の合併である P_0 の元の集合であつてそれ自身の中に特に P_0 の元を含む。而てその元の上に P に含まれる R の点が存在する。故に $R = Rh$ は ωRh に対して *dense* である。従て Rh は $R = Rh$ の拡大である。 ωR は而てコンパクトなる故 ωRh も亦定理1によりコンパクトである。即ち ωRh は R のコンパクト拡大である。 Q.E.D

$\beta R = Z_{P_{\alpha}}$ を R のコンパクト拡大とし P_{α} を ωR のハウスドルフ分解とす。 R のをいこの点を不変に保ちつゝ ωR を βR の上に対応させる連続寫像を $f = h_{\alpha}$ とす。 R の点をそれぞれを含む P_{α} の元と同一視すると ωRh を $\beta R = Z_{P_{\alpha}}$ の上への寫像 $h_{\alpha\omega}$ は R の凡ての点を不変に保つことが出来る。

以上により ωRh は R のコンパクト拡大にして R の点を不変に保ちつゝ R の凡てのコンパクト拡大の上に連続に寫像することが出来る。これ即ち ωRh は βR なることを示す。(理由は原論文 §2 の定理 II 及び III による) 依て定理 A が成立する。 (終り)