OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

| | |
|---|---|
| Title | p 進体ニオケル m 巾根ニツイテ |
| Author(s) | 増田, 勝彦 |
| Citation | 全国紙上数学談話会. 1948, 2(11), p. 335-338 |
| Version Type | VoR |
| URL | https://doi.org/10.18910/75246 |
| rights | |
| Note | |

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

# 112. $\mathfrak{p}$ 進体ニオケル加市根ニツイテ

東北大　増田勝彦

類体論ヲ高木先生ノ御本ノヨウニクミタテル時ニ $\mathfrak{p}$ 進体ノ理論カラ次ノ定理ヲ用イマス.

〔定理〕 $K_{\mathfrak{p}}$ ニオイテ自然数 $n$ ニ対シテ適当ナ限界以上ニ入ラトレバ $K_{\mathfrak{p}}$ ニ於テ $\alpha \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^{\lambda}}$ ナル $\alpha$ ハ $n$ 乗巾デアル. $p^{\nu} /\!/ n$ , $\mathfrak{p}^{e} /\!/ p$ トス

レバ、

$$\lambda > \frac{c}{p-1} + e\gamma \text{ デヨイ.}$$

コレヲ初等的ニ一次ノ合同式ノ解法ノミデミチビキマス.（中山定生ノ局所類体論（岩波）ニモ log ヲツカハナイ証明ガアリマスガ入ノ限界ガ上トナガイマス）事実ハ結局ナコトデスガ計算ガワリニ長クナリマスカラカキトメテオイテモヨイカトオモイマシタ.

証明

i) $\gamma=0$ ノ時　$m=m_0$

与数列 $\chi_i$ ヲ $\chi_1=1$

$$\chi_{i+1}=\chi_i+b_i\varpi^{E_i} \quad \text{デ定メル.}$$

但シ $b_i$ ハ第二 $\bmod \mathfrak{p}$ デ定メタ代表係カラ. $\varpi$ ハ $\mathfrak{p}$ ノ一乗デ丁度ワル数 $B_i$ ハ integer デ $\varpi^{B_i} \| a-\chi_i^m$

$b_i$ ハ $(\lambda_i+b_i\varpi^{\beta_i})^m \equiv \lambda_i \bmod \mathfrak{p}^{\beta_i+1}$

デ定メル. カカル $\beta_i$ $b_i$ カ存在スレバ.

$\beta_{i+1} \geqq \beta_i+1 > \beta_i$ デ $\lambda_i \to \lambda\ (i\to\infty)$

カツ $\chi^m=a$ ナル. トコロデ

$$(\chi_i+b_i\varpi^{\beta_i})^m=\chi_i^m+m\lambda_i^{m-1}b_i\varpi^{\beta_i}+\frac{m(m-1)}{2!}\chi_i^{m-2}b_i\varpi^{2\beta_i}+\cdots$$

$2\beta_i \geqq \beta_i$ ト $\chi_i=1+b_1\varpi^{\beta_1}+\cdots$

カラ

$$\equiv \chi_i^m+m(1+b_1\varpi^{\beta_1}+\cdots)b_i\varpi^{\beta_i}$$

$$\equiv \chi_i^m+mb_i\varpi^{\beta_i} \bmod \mathfrak{p}^{\beta_i+1}$$

故ニ $a-\chi_i^m \equiv mb_i\varpi^{\beta_i} \bmod \mathfrak{p}^{\beta_i+1}$ デ $b_i$ ヲ定メレバヨイカ $(m,p)=1$ 及ビ $\mathfrak{p}^{\beta_i}\|a-\chi_i^m$ カラコノ $b_i$ ノ存在ハ明

ii) $m=m_0p^\gamma$ ノ時　$(\gamma>0)$

$\lambda > \frac{e}{p-1}+e\gamma$ テヨイコト　(X)

$a\equiv 1 \bmod \mathfrak{p}^\lambda$ トスル

マヅ $Y^{m_0}=a$ ヲトク i) ニヨリトケルツクリ方カラ $Y=1+b_1\varpi^{\beta_1'}+\cdots$ デ $\beta_1=\lambda$ 故ニ $Y\equiv 1 \bmod \mathfrak{p}^\lambda$ デ

$Y = X^{p^r}$ ヲトケバヨイ. コレヲ

$Y = X_1^p \quad X_1 = X_2^p \quad \cdots \quad X_{r-1} = X_r^p$

トシテホメテユケルコトヲホス. ((2)ノ假定ノ下デ)

マヅ $Y = X^p$ ガ $\lambda > \frac{e}{p-1} + \epsilon$ ..... (3)

デ $Y \equiv 1 \mod \mathfrak{p}^\lambda$ ナラトケルコトヲホス

$X_1 = 1$ トシテ $X_{i+1} = X_i + b_i \varpi^{\beta_i}$

トシ $\beta_i = \beta_i' - e$ 但シ

$\beta_i'$ ハ $\mathfrak{p}^{\beta_i} /\!/ Y_a - X_i^p$

$b_i$ ハ $(X_i + b_i \varpi^{\beta_i})^p \equiv a \mod \mathfrak{p}^{\beta_i'+1}$

ニヨリ定メル. 又 $b_i$ ノ存在サエイエレバ. (i) ト仮定= $X^p = Y$ ガトケル.

$X_1, \cdots\cdots X_i$ ガエラレタトスル.

$X_{i+1} = X_i + b_i \varpi^{\beta_i} \qquad \beta_i = \beta_i' - e$

デ $\beta_i'$ ハ $\mathfrak{p}^{\beta_i'} /\!/ Y - X_i^p$ トス (注 $\beta_1' = \lambda$)

$(X_i + b_i \varpi^{\beta_i})^p = X_i^p + p b_i \varpi^{\beta_i} X_i^{p-1}$

$+ \frac{p(p-1)}{2!} b_i^2 \varpi^{2\beta_i} X_i^{p-2} + \cdots + b_i^p \varpi^{p\beta_i}$

$p /\!/ \frac{p(p-1)\cdots(p-i+1)}{i!}$ 但シ $i \neq 0 \ p$

又 $j \geq 2$, integer ニツキ $j\beta_i + e \geq 2\beta_i + e > \beta_i + \epsilon = \beta_i$

$(\mathfrak{p}^e /\!/ p)$

又 $X_i = 1 + b_1 \varpi^{\beta_1} + \cdots \quad \beta_1 = \lambda - e$ ヨリ

$(X_i + b_i \varpi^{\beta_i})^p \equiv X_i^p + p b_i \varpi^{p_i} (1 + b_1 \varpi^{\beta_1} + \cdots\cdots)$

$+ b_i^p \varpi^{p\beta_i} \equiv X_i^p + p b_i \varpi^{\beta_i} + b_i^p \varpi^{p\beta_i}$

$\mod \mathfrak{p}^{\beta_i+1}$

今迄ニ $p\beta_i > \beta_i'$ ナル 平等式ヲ考エテキル.

$\beta_i' - e = \beta_i$ 故 $p\beta_i > \beta_i + e$

コレハ $\beta_i$ ガ大キイ程ナリタツ式ダカラ.

$\beta_{i+1} \geq \beta_i + 1 > \beta_i$ カラ

$\beta_1$ デ成立スルコトヲイエバ常ニ成立スル.

$\beta_1 = \lambda - e$ デ $\quad p(\lambda - e) > \lambda$ ハ

$$\lambda > \frac{ip}{p-1} = \frac{e}{p-1} + e = (3)$$

或ニ(3)ノ下デハ $p\beta_i > \beta_i'$ カラ

$$(X_i + b_i \omega^{\beta_i})^p \equiv X_i^p + p b_i \omega^{\beta_i} \mod p^{\beta_i'+1}$$

ニヨリ $b_i$ ノ條件ハ

$Y - X_i^p \equiv b_i p \omega^{\beta_i}$ シカルニ $\beta_i^e // p$ ト $\omega^{\beta_i'} = \omega^{\beta_i + e} // a - X_i^p$ ヨリ $b_i$ ハ存在シテキマル.

又 $Y \equiv 1 \mod p^{\lambda}$ トスルトツクリ方カラ

$X = 1 + b_1 \omega^{\beta_1} + \cdots$ デ $\beta_1 = \beta_1' - e = \lambda - e$

ヨツテ $Y = X_1^p$, $X_1 = X_2^p \cdots X_{r-1} \equiv X_r^p$

ガ r 回トケルコトヲ保証スルニハ.

$$\lambda - (r-1)e > \frac{e}{p-1} + e$$

即チ $\lambda > \frac{e}{p-1} + re$ デ十分ナルコトガシレタ. (終)

(仙台 9月 3日)