



Title	群ニツイテノ二三ノ注意
Author(s)	増田, 勝彦
Citation	全国紙上数学談話会. 1948, 2(11), p. 338-342
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75247
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

113. 群ニツイテノ二三ノ注意

東北大 増田 勝彦

昨年マダ正田先生ノ代数学選論ノデナイコロデシタ。淡中先生ノ御指導デ *Ringtheorem* ト群論トノ關係ヲ學ンデ得タ結果ヲ若干手ヲイレテ以下ニシルシマシタ。

群ト環トヲデキルダケ平衡ニトリアツカツテ *Wedderburn* ノ定理アリマデクミタテヨウトシタノデシタガ、環ニツイテハ常ニ環自体トシテ考エタ方ガ簡單ニ証明サレカツ結果モヨクナルノデシタラハ巻略シマス。シタガツテ群ノ方モ興味本位ノモノニシカスギナクナリマシタガ、右ノモノカ興味デモアツタラトオモツテカキトメマシタ。誤ガナケレバヨイガト思ツテイマス。

群ノ公理ハ次ノ形ニノベラレテアル。

1) $a \cdot b = c$

$$2.) (a \cdot b)c = a(b \cdot c)$$

3.) スクナクモーツ左単位元が存在スル。コレヲ e トカク。

4.) 各元 $a = a^{-1}a = e$ ナル a^{-1} が存在スル

コレカラ ヨクシラレテルヨウニ e が右単位元デアルコト及ビ唯一ノ単位元ナルコト等ガデテクル。今 3 ノ左ヲ右ニカエテ

3*) スクナクモーツ右=単位元が存在スル。ソノーツヲ e トスル
トシ コノ 3* ト

4*) 各元 $a = a^{-1}a = e$ ナル左 逆元 がスクナクモーツ存在スル。

1) 2) 3*) 4*) ヲ満足スル空デナイ 集合ヲソノ箇ノ関係ヲ含メテ S -群ト名ツケテ、コノ S 群ノ構造ヲシラベル。

注意、右単位元ガ $e, e', \dots$ ノ如クイクツカアルデアラウ。ソレニ対シテ a ノ左逆元が存在シタラ、コレヲ $a_e^{-1}, a_{e'}^{-1}, \dots$ ト表ス。4*デ $a_{e'}^{-1}$ が存在スルカラ任意ノ e' ニツイテ $a_{e'}^{-1}$ ハ存在スル。ソレハ $e'a_{e'}^{-1}$ デアル
$$e'a_{e'}^{-1} a = e'e = e'$$

1. S 群ノ構造

定理 1 S 群 $\mathcal{Y}$ ヲ集合ト考エル時ニハ M トカクコトニスルト

$$M = M_1 + M_2 + \dots \quad (\text{集合トシテノ直和})$$

テ M_i ハ各群ヲナス。ソレニ属スル S 群ノ右単位元ニヨリ一意ニ代表サレ且ニ群トシテ同型デアル。

即チ各元ニツイテソレヲ含ム群ガキマリ。ソレガ同型ニナル。

定理 2. シタガツテ右単位元ガ唯一ナラバ S 群ハ群ニナル。

定理 3 S 群 $\mathcal{Y}$ 内デ M_i ノナス群(ソレヲ $\mathcal{Y}_i$ トカク)

$\mathcal{Y}_i$ ハ *Maximal* ナ群デアリ $\mathcal{Y}$ 内ノ *Maximal* ナ群ハ互ニ上ノ集合ノ直和ヘノ分解ニテテクルアル M_j ノ *element* ノナス群デアル。

證明 1) 右単位元 e ヲトリ ex 。但シ $x \in \mathcal{Y}$ ノ形ニカケル元全部ノ集合ハ群ヲナス。コレヲ $e\mathcal{Y}$ トカク

$$\because ee = e \quad e e \mathcal{Y} \quad e \cdot ex = ex \quad (\text{左単位元})$$

$$ex_e^{-1} \cdot ex = e \cdot x_e^{-1} x = ee = e \quad (\text{左逆元})$$

$$ex \cdot ex' = exx' \in e\mathcal{Y}$$

ii) ニツノ右単位元 e, e' ニツイテ $e \notin e' \mathcal{G}$ ト $e' \notin e \mathcal{G}$ トハ $e = e'$ ノ時ニハ明ニ一致スルガ $e \neq e'$ ナラハ共通元ヲモタナイ。

$\therefore$ 今 $e \mathcal{G} \cap e' \mathcal{G}$ ガ空デナクアル元 x ヲモツタナラ

$$x = ex = e'x \quad x\mathcal{G} = ex \cdot \mathcal{G} = e(ex \cdot e\mathcal{G})$$

$$= e \cdot e\mathcal{G} = e\mathcal{G} \quad \text{又} \quad x\mathcal{G} = e'x \cdot \mathcal{G} = e'(e'x \cdot e'\mathcal{G})$$

$$= e' \cdot e'\mathcal{G} = e'\mathcal{G} \quad \therefore e\mathcal{G} = e'\mathcal{G} \quad \text{シカラバ群トシテノ単位元ノ}$$

唯一性カラ $e = e'$

iii) S 群 $\mathcal{G}$ ノ任意ノ元 x ヲ含ム $e' \mathcal{G}$ ノ形ノ群ガ存在スル。ソレハ $x = e, y$ ノ形ニカケルコトヲシメセバヨイ。今任意ニ一ツ右単位元 $\bar{e}$ ヲトツクル。注意

1=ヨリ $x_{\bar{e}}^{-1}$ ガ存在スルガ $\bar{e} \mathcal{G}$ ガ群ナルコトヲ用イテ $\bar{e} x_{\bar{e}}^{-1} \cdot \bar{e} x = \bar{e} =$

$$\bar{e} x \cdot \bar{e} x_{\bar{e}}^{-1} = \bar{e} \cdot x x_{\bar{e}}^{-1} \quad \text{サテ } \mathcal{G} \text{ ノ任意ノ元 } a \text{ 対シテ}$$

$$ax \quad x_{\bar{e}}^{-1} = a \bar{e} \cdot x x_{\bar{e}}^{-1} = a \bar{e} = a$$

$\therefore x x_{\bar{e}}^{-1}$ ハ右単位元 コレヲ e' トカク。

$$x x_{\bar{e}}^{-1} x = e' x = x \cdot x_{\bar{e}}^{-1} x = x \bar{e} = x$$

$$\therefore x \in e' \mathcal{G}$$

ヨツテ定理 1. 2 ガ證明サレタ。

M_i ノ形ハ $e_i \mathcal{G}$ デアルコトヲ考エテ定理 3 ヲ導ク。

今群 $H \cap e \mathcal{G}$ ナラバ 任意ノ $x \in H$ ナル x ニツイテ定理 2 ニヨツテ $x \in e \mathcal{G}$ ナル e' ガ存在スル。コノ内ノ x ノ逆元ヲトル。コレヲ $x_{e'}^{-1}$ トスル。

$$x \cdot x_{e'}^{-1} = e' = (x \cdot e) x_{e'}^{-1} = x \cdot e x_{e'}^{-1}$$

$$\therefore e' \in x \cdot e \mathcal{G} \subset e' H$$

$$\therefore e' \in H \quad \text{群 } H \text{ ノ右単位元ハ唯一ダカラ } e = e' \therefore x \in e \mathcal{G}$$

$$\therefore H \subset e \mathcal{G} \quad \therefore H = e \mathcal{G}$$

次ニ $\mathcal{G}$ 内ニ *Maximal group* K ガアルトスル。コレノ単位元ヲ e_i トスル
ト $K = e_i, K \subset e_i \mathcal{G}$ シカシマダ e_i カ $\mathcal{G}$ ノ右単位ガドウカワカラナイ。タガ e_i ニ対シテ $e_i \in e' \mathcal{G}$ ナル e' ガ存在スル。

$\therefore K \subset e_i \mathcal{G} \subset e' \mathcal{G} \mathcal{G} = e' \mathcal{G}$ 右辺ガ *group* デハ *Maximal* ナルコトカラ $K_i = e' \mathcal{G}$

2. S群ノ存在及どツノ形ノ決定

A) S群ハ実際ニクミタテラレリ 集合 $E = \{\sigma, \tau, \dots\}$ ニツイテ積ヲ
 $\sigma\tau = \sigma$ テ定ムルト群ヲガデキル. コノ形ノ群ヲE準群トヨフコトニスル.

定理4 右単位元ノナス集合ヨリナルE準群ト群ヒ γ トヲ與エラレタ Ξ ニモツ
 S群ハ存在シ *isomorphic* ヲ等シトカンガイレバ Ξ ニキマル.

$$E = \{\sigma, \tau, \dots\}$$

$$H = \{h, k, \dots\}$$

(σ, h) ナル クミニ積ヲ

$$(\sigma, h)(\sigma', h') = (\sigma\sigma', hh') = (\sigma, hh')$$

トスレバ S 群ニナリ, ミトムル形ニナツテルコトハ明 以下略

例1. $E = (\sigma, \tau)$ $H = (1, (12))$

	a	b	c	d
a	a	b	a	b
b	b	a	b	a
c	c	d	c	d
d	d	c	d	c

例2. $E = (\sigma)$ $H = (1, (12))$ 群ニナル.

	a	b
a	a	b
b	b	a

定理 S群ハ右単位元ノ濃度ト 群 $e\gamma$ テ完全ニキマル.

以上テ目的トスル群論ヲ終リマシタ. ステニキゾカレタ通り *Wedderburn* 定理ノ
analogue テス. コレヲ用イテクミタテタ環論ハ Ξ ニノバタ理 Ξ デハブキマスガ一列
 ヲアゲマストホボ決ノヨクニモデキマス.

Ring $\Delta = \text{Minimal}$ ナ左イデアル方存在シ ℓ^2 キリ
 シタガツデ $\ell^2 = \ell$ トスル. スルトヨクシラレタ Artin ノ方法デ ℓ 内ニ
 Körper ($e\ell e$) ガ含マレ且コレガ *Maximal Körper* ナルコト(定理3)
 カイエマス. モシコノ Körper (*Schief Körper*) ニツイテ ℓ ガ有限次ナラユ
 レデ Δ ガ *Matrix* ニ Ξ ニナルカラ, サラニモシ Δ ガ *Simpl* ナラ Ξ ニ表 Ξ
 ニナル.

以上 發其ノ他オキヅキノ点ガアリマシタラオシラセ下サイ。

(仙台 6月 4日)