



Title	無限聯立一次方程式ニツイテ（Ⅰ）
Author(s)	花井, 七郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1948, 2(11), p. 342-344
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75248
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

114. 無限聯立一次方程式ニツイテ (I)

京都工專 花井七郎 (1947.8.1)

無限聯立一次方程式ヲ解ク場合ニ 所謂戴片方法ニヨルノガ最モ自然デアルト思ハレリ。F. Riesz¹⁾ノ著書ニ戴片方法デホメタ結果ガ原ノ聯立一次方程式ヲ満足シナイ例ガ載ツテキル。此処デハ G. Köthe, O. Toeplitz²⁾ガ論ツタ線状座標空間ニ於テ定義サレタ無限聯立一次方程式カ戴片方法デ解ケルタメノ條件ヲホメテ見ル。簡單ノタメニ記号, 定義等ハ Köthe, Toeplitzニ從フコトトスル。

無限聯立一次方程式 $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} y_k = x_i, (i=1, 2, \dots)$ ----- (1)
ニテ $y = (y_1, y_2, \dots), x = (x_1, x_2, \dots)$ ハ夫々線状座標空間 λ, μ ノ点トスル。而シテ無限行列ヲ $\alpha = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots \end{pmatrix}$ トスルトキ (1)ヲ $\alpha y = x$ ト書クコトニスル。

今 α ニ於テ, 各行 $(a_{i1}, a_{i2}, \dots)$ ヲ座標トスル点ハ λ ノ共軛空間 (dual) λ^* ノ点トシ, α ノ第 n_i 戴片ヲ

$$\alpha_{n_i} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{n_i 1} & a_{n_i 2} & \dots & a_{n_i n_i} & 0 \\ & & & & \\ & & & & \\ \hline a_{n_i 1} & a_{n_i 2} & \dots & a_{n_i n_i} & 0 \end{array} \right) \text{トスル。}$$

但 $\{n_i\}$ ハ $\{n\}$ ノ部分列トスル。

又 λ ノ第 n_i 戴片ヲ $\beta_{n_i} = (x_1, x_2, \dots, x_{n_i}, 0, 0, \dots)$ トスル。 α_{n_i} ノ行列式 $|\alpha_{n_i}| \neq 0$ ($i=1, 2, \dots$) ナルトキハ $\alpha_{n_i} y = \beta_{n_i}$ ノ解 $y^{(n_i)} = (y_1^{(n_i)}, y_2^{(n_i)}, \dots, y_{n_i}^{(n_i)}, 0, 0, \dots)$ ハ求メラレリ。今点列 $\{y^{(n_i)}\}$ ノ部分列 $\{y^{(n_j)}\}$ ガアツデ, ソノ各座標ノ極限值即チ $\lim_{n_j \rightarrow \infty} y_k^{(n_j)} = y_k$ ($k=1, 2, \dots$)トスルトキ点 $(y_1, y_2, \dots)$ ガ λ ノ点デアツテ而シテ方程式 (1)ヲ満足スルトキ (1)ハ戴片方法デ解ケルト云フコトニスル。

〔定理1〕 線状座標空間 λ ハ局所弱コンパクトトシ, μ ハ任意ノ線状座標空間トスル $|\alpha_{n_i}| \neq 0, n_i \rightarrow \infty$ (但シ $\{n_i\}$ ハ $\{n\}$ ノ部分列トスル)

ニシテ, α_{n_i} バ逆行列ヲ $\alpha_{n_i}^{-1}$ トスルトキ $\{\alpha_{n_i}^{-1}\}$ ガ空間入ノ *bounded* (有界) ナ点列デアル如キ任意ノ $\beta \in \mu$ ニ對シテ $\alpha_n \beta = \beta$ ノ解 $\beta \in \mu$ ハ該片万法デ求メラレル.

[証明] $\{\alpha_{n_i}^{-1} \beta\}$ は λ , beschränkt な点列ナルカラ. λ の局所弱
 コムパクト性カラ. $\{\alpha_{n_i}^{-1} \beta\}$ の部分列が存在シテ λ の点 $y = (y_1, y_2, \dots)$
 へ弱収斂スル. 初メカラ $\{\alpha_{n_i}^{-1} \beta\}$ ガ y へ弱収斂スルトンテ恒支ヘナイ.
 今 $\alpha_{n_i}^{-1} \beta = y(n_i) = (y_1(n_i), y_2(n_i), \dots, y_{n_i}(n_i), 0, 0, \dots)$ トス
 レバ, 点列 $\{\alpha_{n_i}^{-1} \beta\}$ ガ y へ弱収斂スルカラ $\lim_{n_i \rightarrow \infty} y_k(n_i) = y_k$ ($k=1, 2, \dots$)
 兩シテ $\beta = (x_1, x_2, \dots)$ トスレバ,

$$\begin{cases} a_{11} y_1^{(n_1)} + a_{12} y_2^{(n_1)} + \dots + a_{1n_1} y_{n_1}^{(n_1)} = 1, \\ \dots \\ a_{n_1 1} y_1^{(n_1)} + a_{n_1 2} y_2^{(n_1)} + \dots + a_{n_1 n_1} y_{n_1}^{(n_1)} = 1_{n_1} \quad (i=1, 2, \dots) \end{cases}$$

02, 第 l 行ヲ座標トス N 点ヲ $\tilde{u}_l = (q_{e1}, q_{e2}, \dots)$ トスレバ

$\check{y}_\ell \in \check{y}(\check{z}_\ell)$ テアツテ 且ツ $\check{y}_\ell \in \lambda^*$ デアル.

$$\therefore \ddot{u}_\ell = x_\ell \quad (\ell = 1, 2, \dots)$$

$$\therefore \alpha^2 y = 0 \quad \text{[証明]}$$

次ニ 空間 Ω が特ニ空間 Ω (即チ各座標ハ任意ノ数トスル点ヨリナル空間)ノ
トモハ「定理」上ノ條件ハ又必要條件トナルコトガ云ハル。即チ

〔定理〕 2. $\mathcal{O}_L$ の l 行 r 座標トスル点ハ ω ノ共扼空間 ω^* ノ点 1 部チ有有限個
ノ座標ノミガ 0 デナイ) トスル. $|\mathcal{O}_{n_i}| \neq 0$ ($n_i \rightarrow \infty$) ガ成立スルトキハ
方程式 $\mathcal{O}_L y = \beta$, $\beta \in \mu$ ノ解 y ト ω ガ最良方法デ求メラレルタメノ必要
且ツ十分ナル條件ハ $\{\mathcal{O}_{n_i}^{-1} \beta\}$ ガ *beschränkt* ナ部分列ヲ持ツコトデ
アル. (勿論 ω ノ点列トシテデアル)

「証明」 十分ナルコト. 空間 W は局所コンパクトデアル³⁾ カラ「定理」ヨリ
0 同ノデアル.

1) F. Riesz; les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues P. 23

2) G. Köthe, O. Toeplitz: Journ. für Math. 171 (1934) P. 193-226

3) G. Köthe; Math. Ann. 114 (1937) p. 105

ニシテ、 A_{n_i} 逆行列ヲ $A_{n_i}^{-1}$ トスルトキ $\{A_{n_i}^{-1} \varphi\}$ ガ空間 μ ノ *bounded* (有界) ナ点列デアル知キ任意ノ $\varphi \in \mu$ ニ對シテ $A_{n_i}^{-1} \varphi = \varphi$ ノ解 $\varphi_i \in \mu$ ハ該片方法デ求メラレル。

[証明] $\{a_{n_i}^{-1}b\}$ は λ , beschränkt な点列ナルカラ. λ ノ局所弱
 コムパクト性カラ. $\{a_{n_i}^{-1}b\}$ ノ部分列が存在シテ λ ノ点 $y = (y_1, y_2, \dots)$
 ニ弱収斂スル. 初メカラ $\{a_{n_i}^{-1}b\}$ ガ y ニ弱収斂スルトンテ毫支ヘナイ.
 今 $a_{n_i}^{-1}b = y(n_i) = (y_1(n_i), y_2(n_i), \dots, y_{n_i}(n_i), 0, 0, \dots)$ トス
 レバ. 点列 $\{a_{n_i}^{-1}b\}$ ガ y ニ弱収斂スルカラ $\lim_{n_i \rightarrow \infty} y_k(n_i) = y_k$ ($k=1, 2, \dots$)
 兩シテ $y = (y_1, y_2, \dots)$ トスレバ.

$$\begin{cases} a_{11} y_1^{(n_1)} + a_{12} y_2^{(n_1)} + \dots + a_{1n_1} y_{n_1}^{(n_1)} = I_1 \\ \dots \\ a_{n_1 1} y_1^{(n_1)} + a_{n_1 2} y_2^{(n_1)} + \dots + a_{n_1 n_1} y_{n_1}^{(n_1)} = I_{n_1} \quad (i=1, 2, \dots) \end{cases}$$

又、第 i 行ヲ座標トス N 点ヲ $\tilde{u}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots)$ トスレバ

$\check{U}_\ell$ は $(\check{U}_\ell)$ を満たす 且つ $\check{U}_\ell \in \lambda^*$ である.

$$\therefore \ddot{u}_\ell, \dot{y}_\ell = x_\ell \quad (\ell = 1, 2, \dots)$$

$$\therefore \alpha^2 y = 0 \quad \text{[終]} \quad \square$$

次ニ 空間 $\mathcal{R}$ が特ニ空間 ω (即チ各座標ハ任意ノ数トスル点ヨリナル空間)ノ
トモハ「定理」上ノ條件ハ又必要條件トナルコトガ云ハル。即チ

〔定理〕 2. $\mathcal{O}_L$ の L 行 L 列座標トスル点ハ $\mathcal{W}$ ノ共変空間 $\mathcal{W}^*$ ノ点 (部チ有限個ノ座標ノミガ 0 デナイ) トスル. $|\mathcal{O}_{n_i}| \neq 0$ ($n_i \rightarrow \infty$) ガ成立スルトキハ方程式 $\mathcal{O}_L y = \beta$, $\beta \in \mu$ ノ解 y ト $\mathcal{W}$ ガ数キ方法デ求メラレルタメノ必要且ツ十分ナル條件ハ $\{\mathcal{O}_{n_i}^{-1} \beta\}$ ガ *beschränkt* ナ部分列ヲ持ツコトデアル. (勿論 $\mathcal{W}$ ノ点列トシテデアル)

「証明」 十分ナルコト. 空間 W は局所コンパクトデアル³⁾ カラ [定理] より 0 のデアル.

1) F. Riesz; les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues P. 23

2) G. Köthe, O. Toeplitz: Journ. für Math. 171 (1934) P. 193-226

3) G. Köthe; Math. Ann. 114 (1937) p. 105

必要ナルコト 或方法ヲ解ガ求メラレルトスル。クルトキハ $\{n_i\}$ ノ部分列 $\{n_j\}$ が存在シテ、 $\{\alpha_{n_j}^{-1} \beta\}$ が $n_j \rightarrow \infty$ ノトキ、座標的ニ ω ノ点ニ収斂スル。然ルニ ω ニ於テハ座標的ニ収斂スルコトト弱収斂スルコトハ同値デアレコトハ容易ニ証明サレル。故ニ $\{\alpha_{n_j}^{-1} \beta\}$ ハ *beschränkt*⁴⁾ デアル

[証 終]