



Title	直観論理に於ける否定の取扱ひに関して
Author(s)	大西, 正男
Citation	全国紙上数学談話会. 1948, 2(11), p. 344-348
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75249
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

115. 直観論理に於ける否定の取扱ひについて

大西 正男 (1948. 8. 28)

直観主義数学に於ける論理の形式的な考察には G. Gentzen の
Hegelm_u 等の深い研究があり、更に最近岡田成紘氏が古典論理との群論に於ける
報告をされてゐるが、本書では表題の項目に就く一つの観方を述べようと思ふ。

命題 $A, B, \dots$ に對し A の否定を $\bar{A}$, A ならば B を $A \subset B$, A 且 B を
 $A \cap B$, A 或は B を $A \cup B$, $(A \subset B) \wedge (B \subset A)$ を $A = B$ と 夫々新しい
命題を表すことにする。先づ否定に對して 命題間の C なる Inklusion に就
て次の三つの性質がある。

I) $A \subset \bar{\bar{A}}$ (矛盾律!)

II) $A \subset B$ ならば $\bar{\bar{A}} \subset \bar{\bar{B}}$ (対偶の逆による)

III) $\bar{\bar{\bar{A}}} = \bar{A}$ ($\bar{\bar{A}} = A$ による)

上記は何れも直観的に保証される所の論理的帰結であるが この三つの Satz か
ら $\bar{\bar{A}}$ を A の "closure" と考へれば 命題の作る "lattice" に "topolo-
gy" が考へられる。(但し closure-operator は additive ではない)

即ち I) は包含性、II) は單論性 III) は巾等性に相当するから、直ちに次の
"等式" が得られる。

$$\overline{A \cup B} = \bar{\bar{A}} \cup \bar{\bar{B}}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{\bar{A}} \cap \bar{\bar{B}} \quad (\text{"閉集合"の"交リ"は又 閉集合!})$$

4) 附記 2) / 論文

尚 *Negation* の意味から

$$A \cup B = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}} \quad (*)$$

$$\overline{A \cup B} \subset \overline{A \cap B} \quad \text{が成立する.}$$

以上の等式を用ひて次の一連の等式が容易に得られる.

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\overline{A \cap B}} = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} \\ \overline{\overline{A \cup B}} = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}} \\ \overline{\overline{A \cap B}} = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} \\ \overline{\overline{A \cup B}} = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}} \end{array} \right.$$

⑤ 証明はすべて (*) によつて右辺之等をまじへ一般に $\overline{A}$ なる形の命題が "closed" なることに注意すればよい.

即ち、 $\cap$ と $\cup$ と 及び $-$ と $=$ との間は "duality" が成立する. 古典論理に於ては常に $A = \overline{\overline{A}}$ であるが、上の等式は従つて通常の De Morgan の法則を含んでゐる.

以上の他に更に次の等式が成立つ.

$$\overline{\overline{A} \cap \overline{B}} = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$$

左辺と右辺は用かであるから、 $\overline{\overline{A} \cap \overline{B}} \subset \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$ を証明する.

一般に $A \cap B \subset C$ となるとき、

$$A \cap \overline{C} \subset \overline{B}$$

である. これは本格的には対偶の理であるが形式的に観れば

$$\overline{A \cap B} = \overline{(A \cap \overline{B})} \quad (C \text{ も一つの "operation")}$$

$$\text{及び } A \cap (A \cap B) \subset B$$

が又直観的に正しい式であることを注意すれば

$$\begin{aligned} A \cap \overline{C} &\subset A \cap (\overline{A \cap B}) \quad (A \cap B \subset C \text{ による}) \\ &= A \cap (\overline{A \cap \overline{B}}) \subset \overline{B} \end{aligned}$$

と証明される. この Satz を用ひて

$$A \cap B \subset A \cap \overline{B}$$

なる Grundformel から出発すれば

$$A \cap (\overline{A \cap B}) \subset \overline{B},$$

$$\text{更に } A \cap \overline{B} \subset \overline{\overline{A \cap B}}$$

$A, \bar{B}$ を入れ換へて同じ過程を繰返せば

$$\bar{A} \wedge \bar{B} \subset \overline{\overline{A \wedge B}} \quad (= \text{は中等性をもつ})$$

以上を集合して表記すれば

$$\begin{aligned} & \left(\begin{aligned} A \wedge B \subset \bar{A} \wedge \bar{B} &= \overline{\overline{A \wedge B}} = \overline{\overline{\bar{A} \wedge \bar{B}}} = \overline{\bar{A} \vee \bar{B}} \\ A \vee B \subset \bar{A} \vee \bar{B} &\subset \overline{\overline{A \vee B}} = \overline{\overline{\bar{A} \vee \bar{B}}} = \overline{\bar{A} \wedge \bar{B}} \end{aligned} \right. \\ & \left(\begin{aligned} \bar{A} \wedge \bar{B} &= \overline{\overline{A \vee B}} = \overline{\overline{\bar{A} \wedge \bar{B}}} = \overline{\bar{A} \vee \bar{B}} \\ \bar{A} \vee \bar{B} &\subset \overline{\overline{A \wedge B}} = \overline{\overline{\bar{A} \vee \bar{B}}} = \overline{\bar{A} \wedge \bar{B}} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

但しこの一部は先に三田元が挙げられてゐる。

次に *Allg. - Bv Existenz - Zeichen* の附いた命題に就て考へるのであるが、通常の $\forall x A(x)$ を $\bigcap_x A(x)$ 又は單に $\wedge A$ 、 $\exists x A(x)$ を $\bigcup_x A(x)$ 又は單に $\vee A$ で表すことにして、上の場合と同様に考察を進める。但しこの場合の上の表序に相当する結果は既に Heyting 及び黒田氏によつて得られてゐるが、その導出過程に於ける我々の記号の特色を設たいと思ふ。

ここで前述の $\wedge$ 及び $\vee$ なる *operation* に関しては与へなかつた基本的な *Folgerung* を、そのまゝ共通の記号 $\bigcap_x A(x)$, $\bigcup_x A(x)$ に就ても成立するのであるから、一括して置かう。すべては "lattice" に對する *Analogie* を示してゐる。

$$\bigcap_x A(x) \subset A(x) \subset \bigcup_x A(x)$$

$$\bigcap_x (A(x) \subset B) = (\bigcup_x A(x) \subset B)$$

$$\bigcap_x (B \subset A(x)) = (B \subset \bigcap_x A(x))$$

$$\bigcup_x (B \subset A(x)) = (B \subset \bigcup_x A(x))$$

$$\bigcup_x (A(x) \subset B) = (\bigcap_x A(x) \subset B)$$

従つて $\bar{}$ なる "closure operator" に關して、

$$\begin{aligned} \overline{\bigcup_x A(x)} &= \overline{\bigcup_x \overline{A(x)}} \\ \overline{\bigcap_x A(x)} &= \bigcap_x \overline{\overline{A(x)}} \end{aligned}$$

又

$$\left(\begin{array}{l} \overline{UA(x)} = \bigcap \overline{A(x)} \\ \bigcup \overline{A(x)} \subset \overline{\bigcap A(x)} \end{array} \right) \quad (**)$$

も明かである。

次に二つの不等式を証明する。

$$\left(\begin{array}{l} \overline{\bigcap A(x)} \subset \bigcap \overline{A(x)} \\ \bigcup \overline{A(x)} \subset \overline{\bigcup A(x)} \end{array} \right)$$

任意の x に就いて $\bigcap A(x) \subset A(x)$

故に $\overline{\bigcap A(x)} \subset \overline{A(x)}$

$$\therefore \overline{\bigcap A(x)} \subset \bigcap \overline{A(x)}$$

但も全く同様である。

次に二つの等式を挙げよう。

$$\left(\begin{array}{l} \overline{\bigcap \overline{A(x)}} = \overline{\bigcup A(x)} \\ \overline{\bigcup \overline{A(x)}} = \overline{\bigcap A(x)} \end{array} \right)$$

即ち “*duality*” を示す式の二つである。証明は (**) から明かであらう。

他の二つは

$$\overline{\bigcap \overline{A(x)}} = \overline{\bigcup A(x)}$$

$$\overline{\bigcup \overline{A(x)}} = \overline{\bigcap A(x)}$$

であるが右辺は夫々 $\overline{\bigcup A(x)}$ $\overline{\bigcap A(x)}$ に “等しい” のであるからこれも (**) より明かである。

以上で次の表解が得られた。

$$\left(\begin{array}{l} \bigcap A \subset \bigcap \overline{A} \subset \bigcap \overline{\overline{A}} = \bigcap \overline{\overline{\overline{A}}} = \overline{\overline{A}} \\ \bigcup A \subset \bigcup \overline{A} \subset \overline{\overline{A}} = \overline{\overline{\overline{A}}} = \overline{\overline{A}} \\ \bigcap \overline{A} = \overline{\overline{A}} = \overline{\overline{\overline{A}}} = \overline{\overline{A}} \\ \bigcup \overline{A} \subset \overline{\overline{A}} = \overline{\overline{\overline{A}}} \subset \overline{\overline{A}} \end{array} \right)$$

次に $\subset$ なる operation をほどこした命題に關して同様の考察が行はれるが、

その結果だけを導くことにする。

$$\begin{aligned}
 & (\overline{A} \subset B) \subset (A \subset B) \subset (\overline{A} \supset \overline{B}) = (A \subset \overline{B}) = (\overline{A} \subset \overline{B}) \\
 & = \overline{(\overline{A} \subset B)} = \overline{(A \subset \overline{B})} = \overline{(\overline{A} \supset \overline{B})} = \overline{(A \subset \overline{B})} = \overline{(\overline{A} \subset \overline{B})} \\
 & = \overline{A \cap B} = \overline{A \cup B} = \overline{A \cup \overline{B}} = \overline{A \cap \overline{B}}
 \end{aligned}$$

以上を記して観られることは一般に $\overline{A}$ なる形の命題のもつ *Normalität* である。それはかゝる命題の “closedness” 言ひ換へればそこでは排中律が成立することになる。