



Title	Alegebra ノ Separability 二就テ
Author(s)	池田, 正駿
Citation	全国紙上数学談話会. 1948, 2(12), p. 365-369
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75255
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

121. Algebra / Separability 二就テ

池田正駿 (23. 9. 30)

Algebra $\mathcal{A}$ の Separability 二関シテ. Hochschild, スベテ, two-sided $\mathcal{A}$ -module $\mathcal{M}$ ニツイテ $H^2(\mathcal{A}, \mathcal{M}) = 0$ ナル必要充分条件ヲ出シテキルガ. (Ann. of. math. 46 1945) 此処デハ少シ形ノ違フヲ 1. 及ビ上ノ $\mathcal{M}$ ニ制限ヲツケタヲ 2. ヲ証明シマス.

Lemma 1

$\mathcal{A}$ 上ノ Simple alg. $\mathcal{L}$: $\mathcal{A}$ ノ center 且 $\mathcal{L} = \mathcal{F}(C_1, \dots, C_m)$

$C_i^p = \gamma_i \in \mathcal{F}$

$\mathcal{F}$ ノ 素数 $p \neq 0$ トスルト

$$\mathcal{A}/\mathcal{I} \cong \mathcal{B}$$

但 $\mathcal{D} : \mathcal{A}$, over $\mathcal{F}$ 上ノ derivation alg.

$\mathcal{I} : \mathcal{A}$, inner derivation, ツケル ideal

$\mathcal{E} : \mathcal{L}$, over $\mathcal{F}$ 上ノ derivation alg.

註) コノ Lemma ハ Jacobson abstract derivation and Lie algebras (Trans Am. Math 1937 (42) p 220) ニヨル.

Lemma 2

$\mathcal{A}$: Semi-simple alg. 且 $H^1(\mathcal{A}, \mathcal{A}) = 0 \rightarrow \mathcal{A}$: Separable.

Proof

$\mathcal{A}$ ハ Semi-simple ナル故 Simple components ノ直和デ components ノソノ自身ノ中ヘ, derivation ハ $\mathcal{A}$, derivation ニ拡張出来ルカラ.

$\mathcal{A}$ ガ inseparable simple / 時 $H^1(\mathcal{A}, \mathcal{A}) \neq 0$ ナル事ヲ示セバ充分デアル.

ヨツテ $\mathcal{A}$ inseparable simple トスル.

$\mathcal{A}$ ノ center $\mathcal{L}$ トスル. $\mathcal{L} \cong \mathcal{F}$ デアル. $\mathcal{L}$ ハ $\mathcal{F}$, inseparable extension デアルカラ $\mathcal{L} \cong \mathcal{L}^{(p)} \cong \mathcal{F}$ $\mathcal{L} = \mathcal{L}^{(p)}(C_1, \dots, C_m)$

$C_i^p = \gamma_i \in \mathcal{L}^{(p)}$ (Albert: structure of alg. p. 33) $\mathcal{A}$ ヲ $\mathcal{L}^{(p)}$ 上ノ alg. トカヘテ ソノ derivation alg. ヲ $\mathcal{D}'$ トスルト $\mathcal{D}'$ ハ $\mathcal{A}$ ヲ

$\mathcal{A}$ 上ノ *alg.* ト考ヘテ、 $\mathcal{B}$ ノ *derivation alg.* $\mathcal{D}$ ノ *Subalg.* ($L^{(P)}$)
 ヲ *constants field* トスル如キノト考ヘラレル。即チ $\mathcal{D} \cong \mathcal{D}'$ 又明
 ラカニ *inner derivation* ノツクル *ideal* $\mathcal{I}$ ハ $L^{(P)}$ ヲ *constants*
field トスルカラ $\mathcal{D}' \cong \mathcal{I}$ 。シカルニ Lemma 1ニヨリ $\mathcal{D}'/\mathcal{I} \cong \mathcal{E}$ 。
 但 $\mathcal{E}$ ハ $L/L^{(P)}$ 上ノ *derivation alg.* 且 $L/L^{(P)}$ *insepara-*
ble extension ナル故 $\mathcal{E} = 0$ $\therefore \mathcal{D}'$ 従ツテ $\mathcal{D}$ ハ *inner* ナラザ
 ル *derivation* ヲ含ム。

$$\therefore H^{(1)}(\mathcal{A}, \mathcal{A}) \neq 0$$

Th. 1. $\mathcal{A} : \text{alg.}$ 且 $H^{(1)}(\mathcal{B}, \mathcal{B}) = 0$ for all ideals $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$
 $\iff \mathcal{A} : \text{separable}$

Proof

($\rightarrow$ ノ証明) $\mathcal{A}$ ガ *semi-simple* デナイトスル *radical* ヲ π 。

π ノ *exponent* P トスル。 $P > 1$

$$\text{上ノ條件ヨリ } H^{(1)}(\pi^{P-1}, \pi^{P-1}) = 0$$

即チ f ヲ *derivation* トスルト $f(\pi) = \pi t - t\pi$ $\pi \in \pi^{P-1}$

$t \in \pi^{P-1}$ ナル t ガアル。

$$(\pi^{P-1})^2 = 0 \text{ ヲリ } f(\pi) = 0 \text{ for all } \pi \in \pi^{P-1}$$

ヨツテ *derivation* ハ 0 以外ニナイ。

シカルニ $\varphi(\pi) = \pi$ ナル *mapping* ハ *linear* デアリ

$$\text{且 } \varphi(\pi m) = \pi m = 0 \quad \pi \varphi(m) + \varphi(\pi) m = 2\pi m = 0.$$

$$\pi, m \in \pi^{P-1}$$

$$\therefore \varphi(\pi m) = \pi \varphi(m) + \varphi(\pi) m$$

$\therefore \varphi$ ハ *non-zero derivation* コレハ矛盾

$\therefore \mathcal{A}$ ハ *semi-simple* デナケレバナラヌ。

上ノ條件ヨリ $H^{(1)}(\mathcal{A}, \mathcal{A}) = 0$ 故ニ Lemma 1ニヨリ $\mathcal{A}$ ハ
separable。

($\leftarrow$ ノ証明)

$\mathcal{A}$ ガ *separable* ナラ $\mathcal{A}$ ノ *ideal* ハスベテ *separable*。従ツテ

$$H^{(1)}(\mathcal{B}, \mathcal{B}) = 0 \text{ for all ideal } \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \text{ ハ明ラカデアル。}$$

Example ($H^{(1)}(\pi: \sigma) = 0$ ダケデハ一般ノ σ ハ separable ヲ結論出来ナ
(例)

K ハ 標数 2 ノ field. $\sigma = Ka + Kb$ $a^2 = a, ab = b, ba = 0, b^2 = 0 =$
ヨツテ定義サレル $\text{alg. } \sigma$ ハ radical (b) ヲモツ. 且 $H^{(1)}(\sigma: \sigma) = 0$
ナル. ソレハ σ into σ +iv derivation (0 + ラザル) ハ

$$f_1 \begin{cases} a \rightarrow b \\ b \rightarrow 0 \end{cases} \quad f_2 \begin{cases} a \rightarrow b \\ b \rightarrow b \end{cases} \quad f_3 \begin{cases} a \rightarrow 0 \\ b \rightarrow b \end{cases} \quad \text{等}$$

f_1 ハ $b = 0$ リ与エラレル inner derivation

f_2 ハ $a + b = 0$ リ与エラレル inner derivation

f_3 ハ $a = 0$ リ与エラレル inner derivation

ナルコトニヨリ合ル.

Th. 2 $\sigma: \text{alg.}, H^{(1)}(\sigma, R/K) = 0$ for all ideals $R \geq L$ (但 R .

L ハ σ 又ハ 0 ナルコトヲサス) $\implies \sigma: \text{separable}$

但. R/K ハ elementwise $= a * R/K = \bar{a}, R/K \quad R/K * a = R/K \cdot \bar{a}$
($a \in \sigma, \bar{a}$ ハ a ノ属スル σ/L ノ class) ニヨツテ two-sided σ -
module ト考エル.

Proof

($\implies$ ノ証明)

1) $\sigma: \text{Semi-Simple}$ ナル時ハ 上ノ條件ヨリ $H^{(1)}(\sigma: \sigma) = 0$ 故ニ
Lemma 2 ニヨツテ $\sigma: \text{separable}$.

2) $\sigma \geq L$ (radical) トスル.

σ/L into σ/L ノ derivation ヲ f トスル.

$f^*(a) = f(\bar{a})$ ニヨツテ linear + σ into σ/L ノ mapping

f^* ヲ定義スルト. $f^*(ab) = f(\bar{a}\bar{b}) = \bar{a}f(\bar{b}) + f(\bar{a})\bar{b} = a * f^*(b) + f^*(a) * b$ ヲリ f^* ハ σ into σ/L ノ derivation.

上ノ條件カラ $H^{(1)}(\sigma, \sigma/L) = 0$ ダカラ $\bar{c} \in \sigma/L$ ガアツテ

$$f(\bar{a}) = f^*(a) = a * \bar{c} - \bar{c} * a = \bar{a} \cdot \bar{c} - \bar{c} \cdot \bar{a}$$

$\therefore H^{(1)}(\sigma/L: \sigma/L) = 0$ 且 σ/L ハ semi simple. 故

$=$ Lemma 2 ニヨリ $\sigma/L: \text{separable}$ 故ニ $\sigma \equiv \sigma^* + L + N$

subalg $\mathcal{O}^*$ が存在スル。

$$\mathcal{N}^2 = 0 \text{ ナル時ハ } f(n) = n, \quad n \in \mathcal{N}.$$

$$f(a^*) = 0 \quad a^* \in \mathcal{O}^*$$

$$f(a) = f(a^*) + f(n) \quad a = a^* + n \in \mathcal{O}$$

ニヨリ $\mathcal{O}$ into $\mathcal{N}$ ナル linear mapping f ヲ定義スル

$\mathcal{N}^2 = 0$ ナルコトヲ使ハバ

$$f((n+a^*)(m+b^*)) = f(nm + a^*m + nb^* + a^*b^*) = f(nm) + f(a^*m + nb^*) + f(a^*b^*)$$

$$\text{但 } nm \in \mathcal{N} \quad a^*, b^* \in \mathcal{O}^*$$

$$= f(a^*m + nb^*) = a^*m + nb^*$$

$$\text{又 } (n+a^*)f(m+b^*) + f(n+a^*)(m+b^*) = (n+a^*)m + n$$

$$(m+b^*) = a^*m + nb^*$$

$$\therefore f((n+a^*)(m+b^*)) = (n+a^*)f(m+b^*) + f(n+a^*)(m+b^*)$$

故ニ f ハ $\mathcal{O}$ into $\mathcal{N}$ ナル derivation.

上ノ條件ヨリ $H^{(1)}(\mathcal{O}, \mathcal{N}) = 0$ ナル故 f ハ inner デアル。

$$\text{ヨツテ } f(n) = n\tau - \tau n, \quad \tau \in \mathcal{N} \quad \mathcal{N}^2 = 0 \text{ ヲリ}$$

$$f(n) = 0, \quad \text{for all } n \in \mathcal{N}$$

$$\text{ナルニ } f(n) = n, \quad \text{コレハ矛盾} \quad \therefore \mathcal{N} = 0 \text{ デナケレバナラナイ。}$$

$\mathcal{N}^2 \neq 0$ ナル時ハ

上ノ條件ヨリ $H^{(1)}(\mathcal{O} : \mathcal{O}/\mathcal{N}^2, \mathcal{N}/\mathcal{N}^2) = 0$ $\mathcal{O}/\mathcal{N}^2$ into $\mathcal{N}/\mathcal{N}^2$, derivation

ヲ f トスレバ $f^*(a) = f(\bar{a})$ (但 $a \in \mathcal{O}$ $\bar{a}$ ハ $\mathcal{O}/\mathcal{N}^2$, a ノ居スル

class) ニヨリ $\mathcal{O}$ into $\mathcal{N}/\mathcal{N}^2$, linear mapping f^* ヲ定義

スル $\hat{f}^*$ ナ $\mathcal{O}$ into $\mathcal{N}/\mathcal{N}^2$, derivation ナルコトハ前ト同様

ニ証明出来ル。又 f^* ガ inner ナル事ヨリ f ガ inner ナル事モ文前

ト同様ニ云エルカラ $H^{(1)}(\mathcal{O}/\mathcal{N}^2 : \mathcal{N}/\mathcal{N}^2) = 0$

$\mathcal{O}/\mathcal{N}^2$, radical ハ $\mathcal{N}/\mathcal{N}^2$ $\mathcal{O}/\mathcal{N}^2 / \mathcal{N}/\mathcal{N}^2 \cong \mathcal{O}/\mathcal{N}$ separable

$$\text{ヨリ } \mathcal{O}/\mathcal{N}^2 = \mathcal{O}'/\mathcal{N}^2 + \mathcal{N}/\mathcal{N}^2$$

$$(\mathcal{N}/\mathcal{N}^2)^2 = 0$$

コレハ前ノ場合ト同ジデアルカラ $\mathcal{N}/\mathcal{N}^2 = 0$ $\therefore \mathcal{N} = \mathcal{N}^2 = 0$ デアル

従ツテ $\mathcal{O}$ ノ semi-simple ナル事が知レル。即チ 1) ニヨツテ $\mathcal{O}$

Separable ナル事ヲ知ル。

(← ノ証明)

Hochschild ノ結果カラ明ラカデアル。

以上ニヨツテ, Hochschild ノ條件ノスベテ, *two-sided σ -module*
 ϕ ノ代リニ上ノ様ナ K/K テオキカヘテ置イテ充分デアル事ガワカツタノデスガ
ニ 三 ノ例ニツイテ見ルト *radical* ノ現ハレル *alg.* σ デハ σ カラ
radical へノ *derivation* ガ *inner* テナリナリ 従ツテ 上ノ條件-
ヲ 單ニ $H^{(1)}(\sigma, K) = 0$ for all ideal $K \equiv \sigma$ テ置キ換ヘラレ
ルノデハナイカト思ハレマス。

然シコレハ少シ難カシクテ証明出来マセン。

以上