OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	双計量 Riemann 空間ニ就テ（IV）
Author(s)	田畑, 不二夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1948, 2(12), p. 369-372
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75256
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

122 双計量Riemann空間に就て(IV)

京都帝国　田畑不二夫(1949. 10. 1)

□17. $S^{\lambda}_{\mu\nu}+T^{\lambda}_{\mu\nu}$ ハ座標変換ニ對シテ通常ノ移変ノ径数ト全体ナ変換ヲ受ケル. II, IV, V) ヲ先ズ空間ニ於テハ之ハ $S^{\lambda}_{\mu\nu}+t\frac{\lambda\partial t_u}{\partial u_v}$ ノ形ラトリ ソノ座標系ヲ $ds^2=Se_m\,du^l du^m$. $dt=du^0$ ナルヤウニ択ベバ. ソノ系デハ $S^{\lambda}_{\mu\nu}$ ト全ジ定義数ヲ持ツ. 又コノトキ $t^{\alpha}S_{\mu\nu,\alpha}$. ハ $\frac{1}{2}\frac{\partial S_{\mu\nu}}{\partial a^0}$ ナル形ヲモツ. 尚ホ $-2t^{\alpha}S_{\mu\nu,\alpha}\equiv\underline{S}_{\mu\nu}$ ト置イテ作レル $S^{\lambda}_{\mu\nu}-\underline{S}^{\lambda}_{\mu\nu}$ ハ Tensor デアル事ニ注意シテ置ク.

□18 $e^{\lambda\mu\nu\omega}$ ハ $\lambda\mu\nu\omega$ ナル数列ガ互或ハ偶順列ナルニ従ツテ -1 或ハ $+1$ ヲ表ストスルナラバ $\frac{1}{2}\sqrt{S_{ls}}t^{ls}e_{ik}^{\lambda\mu\nu\omega}\equiv\epsilon^{\lambda\alpha\nu\omega}$ トオクトキ $S^{\lambda}_{\mu\nu}$ ト S'^{λ} トノ Vector 積ハ $\epsilon^{\alpha\lambda}{}_{\mu\nu}t_{\alpha}S^{\mu}S'^{\nu}$ ヲ以テ表ハサレル. 尚任意ノ反変 Vector ハ之ヲ用ヒル事ガ出来ル事カラソノ積 $A\times B=(t^{\lambda}_{\alpha\beta}+S^{\lambda}_{\alpha}t_{\beta}+S^{\lambda}_{\beta}t_{\alpha}+\epsilon^{\lambda}_{\cdot\cdot}t_{c}t_{r}-t^{\lambda}S_{\alpha\beta})A^{\alpha}B^{\beta}$ ト表ハシ得.

iV, V) ナル空間ガ更ニ1)ヲモ満足スルタメノ條件ハ

$A^{\lambda}\equiv\epsilon^{\lambda\alpha\beta\gamma}t_{\alpha}\left(\frac{\partial t_{\beta}}{\partial u_{\gamma}}-\frac{\partial t_{\gamma}}{\partial u_{\beta}}\right)=0$ ノ形ニ書ケル尚ホ $t_{\lambda}A^{\lambda}=\rho$ 且 $A^{\alpha}\left(\frac{\partial t_{\nu}}{\partial u^{\lambda}}-\frac{\partial t_{\lambda}}{\partial u^{\alpha}}\right)$ ト t_{λ} トハ平行ニ ソノ面ハ.

$\sqrt{|S^{\lambda\mu}+t^{\lambda\mu}|\left|\frac{\partial t_\lambda}{\partial u^\mu}-\frac{\partial t_\mu}{\partial u^\lambda}\right|}$ ナル Scalar デアル事モ判ル.

又 $a_{\lambda\mu}+a_{\mu\lambda}=0$ ニシテ $\|a_{\lambda\mu}\|$ ノ rank ガ0デモ4デモナイトキニハ $a_{\lambda\mu}\nabla^\alpha=0$, $t_\alpha\nabla^\alpha=0$ ヨリ ∇^λ ハ $\in^{\alpha\lambda\beta\gamma}t_\alpha a_{\beta\gamma}$ トシテ求メラレル.

□19. 初テ適当ナ座標変換ノ後 $dt=du^0$, $ds^2=S_{lm}du^l du^m$ ル(コヽニ $l.m=1.2.3$ ニシテ $\|S_{lm}\|$ ハ3価正定型式) ナル2計量リーマン空間ヲ考察シテ行クトキ便宜上吾々ノ所謂"運動学"的表現ヲ採用スル事ニアル事ヲ許サレタイ. 例ヘバ $u^l=a^{(l)}$ ハ「流点」ヲ u^0 ハ時刻ト解釈スル等デアル. 尚ホコノ2計量リーマン空間ヲ「(弾体)時空」トモ云フ事トスル.

□20 u^λ ニ於ケル切線空間中ニ於ケル近傍流体ノ変形運動ヲ考ヘル際ニ至ノ主軸(歪軸ト云ハウノハ $\left|\frac{1}{2}S_{\lambda\mu}-\lambda S_{\lambda\mu}\right|=0$ ヲ導入スル事ニヨツテ $\frac{1}{2}S_{\lambda\mu}$ ノ主方向トシテ求マリソノ主軸ノ大キサモ彼ノ根 $\lambda(l)$ ニヨツテ与ヘラレル.

$\frac{1}{2}\frac{\partial S_{\lambda\mu}}{\partial u^0}S^{\lambda\mu}$ ハ同一流体点ニ着目シテノノ体積変化ノ割合ヲ示ス.

一流体点ヲ論ズル際ニモ今且ツ定義数一定ナル空間 Vector 野ヲ流体 Vector 野トミフ事ニスル. 今一ツノ流体 Vector 野ヲ「静止方向即ち t^λ 方向ニ $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ ニ関シテ平行移動」(コノ事ヲ静止的ニ平行移動サセル或ハ静止サセル等ト言表スノシテモ 方向ハ変ラナイトキハ $\frac{\delta V^\lambda}{\delta t}=\frac{1}{2}S^{\lambda\mu}\frac{\partial S_{\alpha\beta}}{\partial u^0}V^\beta=\lambda V^\lambda$ トナツテヰルノデアルガ コノ V^λ ハソノ時刻ニ於ケル歪軸ト一致シテヰル事ヲ証明デキル. 且ツコノ三流体方向ハソノ瞬間直交ヲ保ツト云フ性質ガアル.

□21 歪ミハ二等歪軸ニ関シテ対称デアル事カラコノ三流体方向カ各瞬間ニ於テ若着スルト考ヘラレルーツノ運動体的空間ガ考ヘラレ u^λ ノ近傍ガ之ニ相対的ニ静止スルトモ見ラレル所カラ u^λ ニ於ケル静止空間Rト名付ケル事トシヨウ.

u^λ ノ近傍ノ流体運動ヲコノRニ射影シタトキR中ニ於ケル運動ハ u^λ ニ於テ剛動デアル事ガ確カメラレル.

一般ニ流体ベクトル V^λ R中デ $\in^{\lambda\alpha\beta\gamma}t_\alpha S^{\beta\varepsilon}\frac{\partial S_{\varepsilon\delta}}{\partial u^0}V^\delta V^\gamma\div\delta t$ ナル Vector デ回転スル.

□22 $(u^l\ u^0)$ ノ静止空間R中ニ於ケル (u^l+du^l, u^0) ノ静止空間R'ノ射影ノ同時 Vector θ^λ ハ $\theta^\lambda_\mu=\in^{\delta\alpha\beta\gamma}t_\delta S^\alpha_\varepsilon S^\beta_\rho S_{\mu\sigma}(S^{\varepsilon\sigma}_{\gamma\rho}-S^{\varepsilon\rho}_{\gamma\sigma})$ ヨリ作ラレクル $\vartheta^\lambda_\mu du^\mu$ トシテ求メラレル

□23　尚 R 中ニ於ケル $(u^\lambda)_0$ ノ近傍ノ運動ノ射影ハ二次ノ無限小ノ程度ニ於テハ $(x_i e)_0$. $\left(\frac{\partial x_i}{\partial u^\lambda} S^\alpha_\mu\right)_0$, $(\theta^\lambda_\mu)_0$ 及ビーツノ「遊ビ」テ決マリ. 之等ノ曲種ノ量ハ相互ニ独立デアル.

モノ此ノ考察ヲ平面流体運動ニ関シテ行フトキハコノ「遊ビ」ハ存在シナイコトハ注意スベキデアル.

□24　傳播速度 $v = v(u^\lambda)$ ナルトキ $\int dt = \int \frac{ds}{v} = \int \sqrt{\frac{S_{ik}}{v^2} du^i du^k}$ $\equiv \int \sqrt{K_{ik} du^i du^k}$ ヲ考ヘテ $\delta \int_{(u^\lambda)_0}^{(u^\lambda)_1} dt = 0$ ノ時ヲ求メテ見ヨウ.

$$\delta \int_{(u^\lambda)_0}^{(u^\lambda)_1} dt = \left[\delta u^a K_{ab} \frac{du^b}{dt}\right]_{(u^\lambda)_0}^{(u^\lambda)_1} - \int K_{ik} \frac{d^2 u^k}{dt^2} + K_{ab,i} \frac{du^a}{dt} \frac{du^b}{dt} - \frac{1}{2} \frac{\partial K_{ab}}{\partial u^i} \frac{du^a}{dt} \frac{du^b}{dt} \delta u^i dt$$

左デ之ノ第一ニ $(u^\lambda)_0$, $(u^\lambda)_1$ ニテ $\delta u^\lambda = 0$ ナル条件ヲ与フル事トスル. 第二ニ du^λ ヲ通ル $F=0$ (□3) ノ切線曲面ハコノ場合定義数ガ $K_{ia} du^a dt$ ナル共変 Vector デ表ハサル事カラ δu^λ カソノ上ニアル事即 $K_{ia} du^a \delta u^i - dt \delta u^0 = 0$ ナル條件ヲ與ヘスル事トスル.

以上ノ二條件ヲ $\delta \int_{(u^\lambda)_0}^{(u^\lambda)_1} dt = 0$ ニ用ヒテ δu^λ ヲ消去スレバ速度分布ヲ (u^λ) ナル條件下ノ傳播曲線ノ方程式トシテ

$$K_{ia} \frac{du^a}{dt^2} + K_{ab,i} \frac{du^a}{dt} \frac{du^b}{dt} = \frac{1}{2} \frac{\partial K_{ab}}{\partial u^i} \frac{du^a}{dt} \frac{du^b}{dt} \quad 即 \quad \frac{du^i}{dt^2} + S^{ik} \left\{ \frac{dv}{dt} \frac{du^b}{dt} + \frac{du^k}{dt} \left(-\frac{1}{v^2} \frac{\partial S_{ab}}{\partial u^c} \frac{du^a}{dt} \frac{du^b}{dt} - \frac{2}{v} \frac{\partial v}{\partial u^k} \frac{du^k}{dt} + \frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial u^c} \right) + v \Omega^{ik} \frac{\partial v}{\partial u^k} = 0$$

之ハ□10 ニ述タルモノノ特別ノ場合ニアッテ更ニ v =常数トスレバ□10.2デ述ベ得タルモノヲ別ノ仮定カラ得タ事トナル. 即チ Huygens ノ原理カラ幾何ニ対ノ之ハ Fermat ノ原理ニヨルモノデアル.

□25　又之ヲ静的力学ニ於ケル Lagrange ノ方程式ノ形ニ書ク事ガ出来ルモ $T = \frac{1}{2} S_{ik} u^i u^k$ ($u^i = \frac{du^i}{dt}$) トオク事ニヨリ $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial u^i}\right) = \frac{\partial T}{\partial u^i}$ トスレバヨイ. 但シココニ $\frac{\partial}{\partial u^i}$ ナル Operation ハ $\frac{\partial}{\partial u^i} + \frac{\partial T}{\partial s} S_{ia} \frac{du^a}{ds} \frac{\partial}{\partial t}$ ヲ表スモノトシタ.

□26. 尚又 $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} S^{\lambda\alpha} \left\{ \frac{\partial S_{\alpha\mu}}{\partial u^\nu} + \frac{\partial S_{\alpha\nu}}{\partial u^\mu} \left(\frac{dt}{ds} S_{\mu\nu} \frac{du^\beta}{ds} - t_{,\alpha} \right) + \right.$

$\frac{\partial S_{\lambda\mu}}{\partial u^\nu}+\frac{\partial S_{\lambda\nu}}{\partial u^\mu}\left(\frac{dt}{ds}S_{\nu\beta}\frac{du^\beta}{ds}-t_\nu\right)-\frac{\partial S_{\mu\nu}}{\partial u^\lambda}-\frac{\partial S_{\mu\nu}}{\partial u^\alpha}\left(\frac{dt}{ds}S_{\lambda\beta}\frac{du^\beta}{ds}-t_\lambda\right)\}$ ヲ用フレバ

$\frac{d^2u^\rho}{dt^2}+\Delta\Gamma^\rho_{\alpha\beta}\frac{du^\alpha}{dt}\frac{du^\beta}{dt}=0$ ノ形ニ表ス事ガ出来ル.

□27 $\Delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}du^\nu=\left\{\left(s\Gamma^\lambda_{\mu\nu}+t^\lambda\frac{\partial t_\mu}{\partial u^\nu}-\frac{1}{2}S^{\lambda\alpha}t_\mu\frac{\partial S_{\alpha\nu}}{\partial u^\alpha}\right)+\frac{S^{\lambda\alpha}}{2}\frac{dt}{ds}\frac{du^\rho}{ds}\left(\frac{\partial S_{\alpha\nu}}{\partial u^\rho}S_{\mu\beta}-\frac{\partial S_{\mu\nu}}{\partial u^\rho}S_{\alpha\beta}\right)\right\}du^\beta$ デアルガ 之ヲ $A^\lambda_{\mu\nu}du^\nu$ ト オキタル $A^\lambda_{\mu\nu}$ ハ □ミニ於ケル計量移変ノ條件ヲ満ヘテヰル事ガ分リ ソノ第二項ハ $D^\lambda_{\mu\nu}$ ニ相当スルモノデアツテ之ハ静止空間ニ対スル移変ニヨル回轉ヲ表スモノデアツタ コノ回轉 Vector ヲ D^λ トスレバ $D^\lambda=\epsilon^{\alpha\beta\gamma\lambda}t_\alpha S_{\beta\varepsilon}\frac{\partial S_{\varepsilon\delta}}{\partial u}\frac{du^\delta}{ds}\frac{du^\gamma}{ds}$ デアツテ 之ハ静止空間ニ於ケル空体 Vector $\frac{du^\lambda}{ds}$ ノ回轉 Vector (□22.) ニ相当スルモノデアル. 尚コノ D^λ ハ du^λ ト直交シ且ツソノ方向ノ相互ニ共変的デアルヨニ確カメル事ガ出来ル. (時空ノ研究6)

(昭和25. 8. 30)