



Title	定常な週期分布に就て
Author(s)	梯, 鉄次郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1948, 2(12), p. 372-378
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75257
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

123. 定常な週期分布に就て

梶 鉄次郎 (1948.10.15)

§1. 定義その他

(定義1)

$\langle 0, 1 \rangle$ に於ける可測函数 $X(\xi)$ の週期分布 $F(x)$ を次式により定義する。

即ち $0 \leq x < 2\pi$ に対して

$$F(x) = \left| \left\{ \xi : 0 \leq X(\xi) \pmod{2\pi} \leq x \right\} \right| \cdots \cdots (1)$$

然るとき $F(x)$ は $\langle 0, 2\pi \rangle$ にて 右に半連続な单调非減少函数となり

$F(2\pi) = 1$ なる関係を満たす。例へばルーレット *Fourier* 環に於ける状態等は週期分布の問題と考えられる。

(定義2)

週期分布が次の関係を充す場合 $F(x)$ は定常であると云ふ。即ち

$$F(x) = F(x) * F(x) = \int_0^{2\pi} F(x-y) dF(y) \cdots \cdots (2)$$

定常分布を $F^*(x)$ で表はす事にする。

此の事は *time parameter* τ を導入した場合

$$F(x, t_1 + t_2) = F(x, t_1) * F(x, t_2) = F(x, t_1)$$

となり、 t_2 無関係である事と同等である

(定義3)

遷移分布 $F(x)$ に対して

$$\varphi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} dF(x) \quad \lambda = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

なる $\varphi(\lambda)$ を $F(x)$ の固有値と云う事にする。

(3) 及び (1) より

$$\varphi(\lambda) = \int_0^1 e^{i\lambda X(\xi)} d\xi \quad \dots \dots \dots (4)$$

が得られる。

又 $\varphi(\lambda)$ の性質として (3) より直ちに分る事は

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= 1 & \varphi(-\lambda) &= \overline{\varphi(\lambda)} \\ |\varphi(\lambda)| &\leq \varphi(0) = 1 \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (5)$$

ここに $\varphi(\lambda)$ は 正の定符号数列を作る。即ち 任意の複素数 $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$

$$\text{に対して} \quad \sum_{\mu, \nu=0}^n \varphi(\mu - \nu) \alpha_\mu \overline{\alpha_\nu} \geq 0$$

なる事が証明出来る。又 $\varphi(0) = 1$ を満足する正の定符号数列 $\varphi(\lambda)$ に対しては

$$\varphi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} dF(x)$$

なる関係を満足する $F(x)$ が存在する事が証明される。

§2. 定常分布の固有値

$F(x)$ が定常なる場合 即ち $F(x) * F(x) = F(x)$ なる場合の固有値に就て考える。先づ。

(補助定理1)

定常遷移分布 $F^*(x)$ の固有値を $\varphi(\lambda)$ とすれば、

$$\varphi(0) = 1, \quad \dots \quad \varphi(\lambda) = 0 \quad \text{又は} \quad 1 \quad \dots \dots \dots (6)$$

(証明)

任意の遷移分布 $F_1(x), F_2(x)$ の固有値を夫々 $\varphi_1(\lambda), \varphi_2(\lambda)$ とし

$F(x) = F_1(x) * F_2(x)$ の固有値を $\varphi(\lambda)$ とすれば、

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda) &= \int_0^{2\pi} e^{i\lambda x} d_x \left(\int_0^{2\pi} F_2(x-y) dF_2(y) \right) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\lambda x} d_x F_1(x-y) dF_2(y) \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\lambda(x+y)} dF_1(x) dF_2(y) = \int_0^{2\pi} e^{i\lambda x} dF_1(x) \int_0^{2\pi} e^{i\lambda y} dF_2(y) \\ &= \varphi_1(\lambda) \varphi_2(\lambda)\end{aligned}$$

即ち $\varphi(\lambda) = \varphi_1(\lambda) \varphi_2(\lambda) \dots \dots \dots (7)$

となる。

従つて $F^*(x) = F^*(x) * F^*(x)$ に対しては

$$\varphi(\lambda) = [\varphi(\lambda)]^2$$

となり 従つて (6) が証明出来た

之は $F(x)$ が定常なる爲の必要條件である。更に

(補助定理2)

遷移分布 $F(x)$ の固有値 $\varphi(\lambda)$ に於て 0 ならざる μ に就て

$\varphi(\mu) = 1$ なるときは $\lambda = 0 \pmod{\mu}$ なる λ に対して

$$\varphi(\lambda) = 1$$

(証明)

$\mu \neq 0$ なる μ に対して $\varphi(\mu) = 1$ ならば (4) より

$$\varphi(\mu) = \int_0^1 e^{i\mu X(\xi)} d\xi = 1$$

即ち 測度 0 を除いて

$$\mu X(\xi) = 0 \pmod{2\pi}$$

従つて任意の整数 n に就いて

$$n\mu X(\xi) = 0 \pmod{2\pi}$$

即ち $\varphi(n\mu) = \int_0^1 e^{in\mu X(\xi)} d\xi = 1$

之を補助目的が 証明された

斯の如く μ の正の最小値を ρ とするとき

$$\begin{cases} \varphi(\lambda) = 1 & \lambda = 0 \pmod{\rho} \\ \varphi(\lambda) = 0 & \lambda \neq 0 \pmod{\rho} \end{cases} \dots \dots \dots (8)$$

なることは

$$\rho X(\frac{1}{\rho}) = 0 \pmod{2\pi} \text{ 即ち } X(\frac{1}{\rho}) = 0 \pmod{\frac{2\pi}{\rho}}$$

なることより明らかであろう。

(8) を満足する $\varphi(\lambda)$ を $\varphi_\rho(\lambda)$ と書くことにする。此の場合 $\varphi(\lambda)$ は $\varphi(0)$ を中心として対称 即ち

$$\varphi(-\lambda) = \varphi(\lambda)$$

であるから $\varphi(0) \varphi(1) \varphi(2) \dots$ を列記すれば、

$$\varphi_1(\lambda) \quad 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ \dots\dots$$

$$\varphi_2(\lambda) \quad 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots\dots$$

$$\varphi_3(\lambda) \quad 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots\dots$$

etc.

となる。然ると定常分布の必要条件として 次の補助定理を得る。

(補助定理 3)

定常分布 $F^*(x)$ の固有値は $\varphi_\rho(\lambda)$ である。ここに $\rho = 1, 2, 3, \dots, \infty$ の何れかである。

$\varphi_\infty(\lambda)$ が固有値であれば 定常分布の固有値であることは (補助定理 1) より明らかである。

$\varphi(\lambda) = \varphi_\rho(\lambda)$ は定常分布の必要条件であつて、充分条件であるかどうかは分らない。之を証明するには $\varphi_\rho(\lambda)$ が正の定符号数列を作ること、即ち $\varphi_\rho(\lambda)$ には必ず分布函数が対応することを証明せねばならない。

次に之を述べる。

§3. 定常週期分布

正の整数 ρ に対して、 $x = 0, \frac{2\pi}{\rho}, \frac{2\pi}{\rho}, \dots, \frac{2(\rho-1)}{\rho}\pi$ に於て、 $\frac{1}{\rho}$ ずつの乖離のある風速増加階段函数を $F_\rho^*(x)$ と書くことにする。即ち

$$F_\rho^*(x) = \begin{cases} \frac{1}{\rho} & 0 \leq x < \frac{2\pi}{\rho} \\ \frac{2}{\rho} & \frac{2\pi}{\rho} \leq x < \frac{4\pi}{\rho} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \frac{2(\rho-1)}{\rho}\pi \leq x < 2\pi \end{cases} \dots\dots\dots (9)$$

依るとき $F_p^*(x)$ の固有値は

$$\int_0^{2\pi} e^{i\lambda x} dF_p^*(x) = \frac{1}{p} \sum_{m=0}^{p-1} c \frac{2\pi i m \lambda}{p}$$

$$= \frac{1}{p} \frac{1 - e^{2\pi i \lambda}}{1 - e^{\frac{2\pi i \lambda}{p}}} = \begin{cases} 0 & \lambda \neq 0 \pmod{p} \\ 1 & \lambda = 0 \pmod{p} \end{cases}$$

従つて $F_p^*(x)$ の固有値は前述の $\varphi_p(\lambda)$ になる。あらゆる正の整数 p に対して $F_p^*(x)$ は存在する。特に $\varphi_\infty(\lambda)$ に対しては $F_p(x)$ の極限函数として

$$F_\infty^*(x) = \frac{x}{2\pi} \text{ ----- (10)}$$

が対応することは明らかである。以上定常分布が必要充分条件として次の定理が得られる。

【定理1】

週期分布 $F(x)$ が定常である爲の必要充分条件は、

$$F(x) = F_p(x) \quad p = 1, 2, 3, \dots$$

なることである。従つて固有値として $\varphi_p(\lambda)$ を有することである。

ここに $F_p(x)$, $\varphi_p(\lambda)$ は夫々 (9), (8) によつて定義されるものとする。

(系)

0.1. を要素とする正の定符号数列は $\varphi_p(\lambda)$ である。

この係は直ちに証明出来るが、ここでは「定理1」及び今までの事から明らかである。

又、定常分布同士の *Convolution* は又定常分布になることは明らかであるが、それに向して次の定理が得られる。

【定理2】

$$F_{p_1}^*(x) * F_{p_2}^*(x) = F_{(p_1, p_2)}^*(x) \text{ ----- (11)}$$

ここに (p_1, p_2) は p_1, p_2 の最小公倍数を表はすものとする。更に一般に

$$F_{p_1}^*(x) * F_{p_2}^*(x) * \dots * F_{p_N}^*(x) = F_{(p_1, p_2, \dots, p_N)}^*(x) \text{ ----- (12)}$$

特に $F_\infty^*(x)$ に対しては 任意の週期分布 $F(x)$ に対して

$$F_\infty^*(x) * F(x) = F_\infty^*(x) \text{ ----- (13)}$$

(証明)

まず(11)を証明する.

$F_{f_1}(x), F_{f_2}(x)$ の固有値は夫々 $f_1(\lambda), \varphi_{f_2}(\lambda)$ であり $F_{f_1}^*(x) \times F_{f_2}^*(x)$ の固有値は(7)により.

$$f_1(\lambda) \varphi_{f_2}(\lambda) = \varphi_{(f_1, f_2)}(\lambda)$$

となる. 又 $\varphi_{(f_1, f_2)}$ の分布函数は $F_{(f_1, f_2)}^*(x)$ なることより(12)は明らか.

(12)も同様に証明出来る.

(13)は $\varphi_\infty(\lambda) = \dots\dots 0, 1, 0, 0, \dots\dots$

$$\varphi(\lambda) = \dots\dots \bar{\alpha}_1, 1, \alpha_1, \alpha_2, \dots\dots$$

なることより明らかである.

(定理2)により $F_\infty^*(x)$ が最も安定であり, $F_f^*(x)$ は定常と云ふものの一寸した擾乱により定常性が破れて $F_\infty^*(x)$ に *tend*することが現はれる.

又任意の連続な分布の無限回 *convolution*, 即ち極限法則として

$F_\infty^*(x)$ が得られる事が分る. 即ち連続分布に於ては,

$$|\varphi(\lambda)| < \varphi(0) = 1 \quad \lambda \neq 0$$

なることが云へるからである.

$$\text{又 } |\varphi(\lambda)| = 1 \quad \lambda \neq 0$$

なる場合の分布も $F_f^*(x)$ に類似の性質を有するが, 之等については省略する.

(附記)

超幾何分布の例としては前にも述べたが 以上の事から簡単に分る例としては.

(1) 骰子を何個か振つた場合の目の總和が h を *mod* とし同じ確率を取ることは

$$F_h^*(x) * F_h^*(x) = F_h^*(x)$$

なることにより明らかである.

(2) ルーレットが起点の位置に無関係なることは

$$F_{\infty}^*(x) * F_{\infty}^*(x) = F_{\infty}^*(x)$$

なることより明らかであろう。

- (3) *Fourier* 理に於ける定常熱傳導の問題は熱の移動の連続性より $F_{\infty}^*(x)$ であることは容易に分ることである。