



Title	一つの直交多項式と其の應用に就て
Author(s)	梯, 鉄次郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1948, 2(12), p. 378-383
Version Type	VoR
URL	<a href="https://doi.org/10.18910/75258">https://doi.org/10.18910/75258</a>
rights	
Note	

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

# 124. 一つの直交多項式と其の應用に就て

梯 鉄次郎 (1948. 10. 15)

## §1. 多項式 $P_m^{(n)}(x)$

多項式  $P_m^{(n)}(x)$  を次式によつて定義する。即ち

$m = 0, 1, 2, \dots, n$  に就て、

$$P_m^{(n)}(x) = \frac{1}{m!} \Delta^m \left[ \prod_{\mu=0}^{m-1} (x-\mu) \prod_{\mu=0}^{m-1} (x-\overline{n+1+\mu}) \right] \dots\dots\dots (1)$$

但し  $P_0^{(n)}(x) = 1$

とする。茲に  $\Delta f(x)$  は  $\{f(x+1) - f(x)\}$  を表はすものとする。

此の定義より  $P_m^{(n)}(x)$  を計算すれば、

$$\begin{aligned} P_m^{(n)}(x) = & \prod_{\mu=0}^{m-1} (x-\overline{n-\mu}) + m^2 x \prod_{\mu=0}^{m-2} (x-\overline{n-\mu}) + \left(\frac{m(m-1)}{2}\right)^2 (x-1) \prod_{\mu=0}^{m-1} (x-\overline{n-\mu}) + \\ & \dots\dots\dots + \left(\frac{m(m-1)\dots(m-\nu+1)}{\nu!}\right)^2 \prod_{\mu=0}^{\nu-1} (x-\mu) \prod_{\mu=0}^{m-\nu-1} (x-\overline{n-\mu}) + \dots\dots\dots \\ & + m^2 \prod_{\mu=0}^{m-2} (x-\mu) \cdot (x-\overline{n}) + \prod_{\mu=0}^{m-1} (x-\mu) \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

となる。

(2)より直ちに分る性質として  $P_m^{(n)}(x)$  の最高次の係数即ち  $m$  次の係数は

$$1 + (mC_1)^2 + (mC_2)^2 + \dots + (mC_m)^2 = \frac{(2m)!}{(m!)^2}$$

となる。又 (2) に於て  $x=0, \bar{x}=\overline{n}$  と置けば

$$P_m^{(n)}(0) = (-1)^m \prod_{\mu=0}^{m-1} (\overline{n-\mu})$$

$$P_m^{(n)}(n) = \frac{n-1}{\prod_{\mu=0}^{m-1} (n-\mu)}$$

とある。

$m=0, 1, 2, 3, 4$  に於ける  $P_m^{(n)}(x)$  の計算結果を列示すれば

$$P_0^{(n)}(x) = 1$$

$$P_1^{(n)}(x) = 2x - n$$

$$P_2^{(n)}(x) = 6x^2 - 6nx + n(n-1) \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$P_3^{(n)}(x) = 20x^3 - 30nx^2 + 2(6n^2 - 3n + 2)x - n(n-1)(n-2)$$

$$P_4^{(n)}(x) = 70x^4 - 140nx^3 + 10(4n^2 - 3n + 5)x^2 - 10n(2n^2 - 3n + 5)x + n(n-1)(n-2)(n-3)$$

### §2. $P_m^{(n)}(x)$ の直交性

$x=0, 1, 2, \dots, n$  に於て 1 づつ飛躍のある階段函数を  $\mu(x)$  とする。即ち

$$\mu(x) = \sum_{i=0}^m A_i \quad m \leq x < m+1 \quad \text{ここで } A_i = 1$$

とする。此の  $\mu(x)$  を用ひて、

$$\int_0^n f(x)g(x)d\mu(x)$$

なる場合  $f(x)$  と  $g(x)$  の直交を定義する。

此の定義に於て、 $P_m^{(n)}(x) \quad m=0, 1, 2, \dots, n$  は直交函数系を作る。

之を証明するに於ては

$$\int_0^n x^\nu P_m^{(n)}(x) d\mu(x) = 0, \quad \nu < m \quad \dots\dots\dots (4)$$

を証明すれば充分である。

$P_m^{(n)}(x) = \Delta^m Q_m(x)$  と置けば、

$$\int_0^n x^\nu P_m^{(n)}(x) d\mu(x) = [x^\nu \Delta^{m-1} Q_m(x) - \Delta x^\nu \Delta^{m-2} Q_m(x+1) + \Delta^2 x^\nu \Delta^{m-3} Q_m(x+2) - \dots \dots \dots + (-1)^\nu \Delta^\nu x^\nu \Delta^{m-\nu-1} Q_m(x+\nu)]_0^{n+1}$$

となり. 又  $[\Delta^{m-\mu-1} Q_m(x+\mu)]_{x=n+1} = 0 \quad \mu \leq m$   
 であるから. 結局(4)が証明された.  $x=0$  即ち  $P_m^{(n)}(x)$  は直交函数系を作る.

$$\begin{aligned} \int_0^n [P_m^{(n)}(x)]^2 d\mu(x) &= \int_0^n [\Delta^m Q_m(x)]^2 d\mu(x) = (-1) \int_0^n \Delta^{m+1} Q_m(x) \Delta^{m-1} Q_m(x+\mu) d\mu(x) \\ &= (-1)^m \int_0^n \Delta^{2m} Q_m(x) \cdot Q_m(x+m) d\mu(x). \\ &= (-1)^m \frac{(2m)!}{m!} \int_0^n Q_m(x+m) d\mu(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^n Q_m(x+m) d\mu(x) &= \frac{1}{m!} \int_0^n \prod_{\mu=0}^{m-1} (x+m-\mu) \prod_{\mu=0}^{m-1} (x-n+\mu) d\mu(x) \\ &= \frac{-m}{(m+1)!} \int_0^n \prod_{\mu=0}^m (x+m-\mu) \prod_{\mu=0}^{m-1} (x-n+\mu-1) d\mu(x) \\ &= \frac{(-1)^m m!}{(2m)!} \int_0^n \prod_{\mu=0}^{2m-1} (x+m-\mu) d\mu(x) \\ &= \frac{(-1)^m m!}{(2m+1)!} \left[ \prod_{\mu=0}^{2m} (x+m-\mu) \right]_0^{n+1} = \frac{(-1)^m m!}{(2m+1)!} \prod_{\mu=0}^{2m} (n+m+1-\mu) \end{aligned}$$

故に  $\int_0^n [P_m^{(n)}(x)]^2 d\mu(x) = \frac{1}{2m+1} \prod_{\mu=0}^{2m} (n+m-1-\mu)$  となる.

即ち. 以上の結果をまとめれば.

$$\int_0^n P_m^{(n)}(x) P_{m'}^{(n)}(x) d\mu(x) = \begin{cases} \frac{1}{2m+1} \prod_{\mu=0}^{2m} (n+m-1-\mu) & m=m' \\ 0 & m \neq m' \end{cases} \dots (5)$$

となる.

### §3. 循環公式と階差方程式

$P_m^{(n)}(x)$  は次の循環公式を満足する. 即ち

$$(m+1) P_{m+1}^{(n)}(x) - (2n+1)(2x-n) P_m^{(n)}(x) + m(n+m+1)(n-m-1) P_{m-1}^{(n)}(x) = 0 \dots (6)$$

証明 —

$P_{m+1}^{(n)}(x)$  と  $P_m^{(n)}(x)$  の最高次の係数は前に述べた如く夫々

$$\frac{(2m+2)!}{[(m+1)!]^2} \cdot \frac{(2m)!}{(m!)^2} \quad \text{となるから}$$

$$P_{m+1}^{(n)}(x) - \frac{2(2m+1)}{m+1} x P_m^{(n)}(x) = \alpha P_m^{(n)}(x) + \beta P_{m-1}^{(n)}(x) + R(x)$$

と書ける。ここに  $\alpha, \beta$  は常数  $R(x)$  は高々  $(m-2)$  次の多項式である。

ここで  $R(x)$  を両辺に掛けて前述の Stieltjes 積分を施せば

$$\int_0^n [R(x)]^2 d\mu(x) = 0$$

となり  $R(x_i) = 0 \quad x_i = 0, 1, 2, \dots, n$  となる。然るに  $R(x)$  の次数は  $n$  より小であるから、 $R(x) \equiv 0$  でなくてはならない。又  $x=0, x=n$  と置き、 $\alpha, \beta$  の値を求めれば、

$$\begin{cases} \alpha = \frac{2m+1}{m+1} n \\ \beta = \frac{-m(n-m-1)(n+m+1)}{m+1} \end{cases}$$

を得る。

此の項を上式に代入すれば (8) を得る。

次に又  $P_m^{(n)}(x)$  は次の階差方程式を満足する。

即ち  $P_m^{(n)}(x)$  は階差方程式

$$(x-\overline{n-2})(x+2) \Delta^2 y(x) + [2x-\overline{n-2}+m(m+1)] \Delta y(x) - m(m+1)y(x) = 0 \quad \dots (7)$$

の解である。

証明—

$$Q_m(x) = \frac{1}{m!} \prod_{\mu=0}^{n-x-1} (x-\mu) \prod_{\mu=0}^{m-1} (x-\overline{n+1+\alpha}) \quad \text{と置けば、}$$

$$\Delta Q_m(x) = \Delta \prod_{\mu=0}^{n-x-1} (x-\mu) \prod_{\mu=0}^{m-1} (x-\overline{n+1+\mu}) + \prod_{\mu=0}^{m-1} (x-\mu) \Delta \prod_{\mu=0}^{m-1} (x-\overline{n+1+\mu})$$

$$= \frac{1}{(m-1)!} \frac{Q_m(x)}{(x-\overline{n+m})} \left( \frac{x-\overline{n}}{x-\overline{n-1}} + 1 \right)$$

$$\text{即ち } (x-\overline{n+m})(x-\overline{n-1}) \Delta Q_m(x) = \frac{1}{(m-1)!} (2x-\overline{n+m-1}) Q_m(x)$$

此の両辺に  $\Delta^{m+1}$  を施せば

$$(x-\overline{n+m})(x-\overline{n-1}) \Delta^{m+2} Q_m(x) + (m+1)(2x-\overline{n-2}) \Delta^{m+1} Q_m(x) + m(m+1)$$

$$\Delta^m Q_m(x) = \frac{1}{(m-1)!} (2x-\overline{n-m-3}) \Delta^{m+1} Q_m(x) + \frac{2}{(m-1)!} \Delta^m Q_m^{(n)}(x)$$

之を整理して

$$(x - \overline{n-1})(x+2)\Delta^2 P_m^{(n)}(x) + [2x - n - 2 + m(m+1)]\Delta P_m^{(n)}(x) - m(m+1)P_m^{(n)}(x) = 0$$

即ち  $P_m^{(n)}(x)$  は (7) の解である事が分る。

§4. 最小自乗法及補間法に於ける  $P_m^{(n)}(x)$  の應用

ここで最小自乗法と云ふのは  $f(x)$  を  $\sum_{m=0}^k a_m P_m^{(n)}(x) : k \leq n$  にて近  
 似し

$$I = \int_0^n [f(x) - \sum_{m=0}^k a_m P_m^{(n)}(x)]^2 d\mu(x) = \min \quad \dots\dots\dots (8)$$

なる様に系数  $a_m$  を定むるものとする。

$P_m^{(n)}(x)$  の直交性を用ひれば (8) は

$$I = \int_0^n [f(x)]^2 d\mu(x) + \sum_{m=0}^k a_m^2 \int_0^n [P_m^{(n)}(x)]^2 d\mu(x) - 2 \sum_{m=0}^k a_m \int_0^n f(x) P_m^{(n)}(x) d\mu(x)$$

$$= \int_0^n [f(x)]^2 d\mu(x) + \lambda_m \sum_{m=0}^k (a_m - \frac{d_m}{\lambda_m})^2 - \sum_{m=0}^k \frac{d_m^2}{\lambda_m}$$

となる。こゝに

$$\lambda_m = \int_0^n [P_m^{(n)}(x)]^2 d\mu(x)$$

$$d_m = \int_0^n f(x) P_m^{(n)}(x) d\mu(x)$$

とする。

故に  $I$  を  $\min$  にする様な  $a_m$  の値は

$$a_m = \frac{d_m}{\lambda_m} = \frac{\int_0^n f(x) P_m^{(n)}(x) d\mu(x)}{\int_0^n [P_m^{(n)}(x)]^2 d\mu(x)} \quad \dots\dots\dots (9)$$

となる。(9) は又(5)を用ひれば

$$a_m = \frac{2m+1}{\frac{2m}{\pi} (n+m-1-\mu)} \sum_{\chi_i=0}^n f(\chi_i) P_m^{(n)}(\chi_i) \quad \dots\dots\dots (10)$$

に計算される。即ち係数は積分を行ふ必要がなく 四則のみにより計算される。

又(8)に於て  $k=n$  とすれば  $\sum_{m=0}^n A_m P_m^{(n)}(x)$  は明らかに  $f(x)$  の補間多項式となり  $R=0$  となる。此の場合補間多項式は最小自乗法の特殊な場合となり、其の係数は又(9)(10)で表はされる事は明らかである。即ち  $P_n^{(n)}(x)$  は等間隔補間にも応用されるのである。

$$\text{又 } f(x) - \sum_{m=0}^n A_m P_m(x) = R_n(x)$$

とすれば 補間法に於てよく知られてゐる様に

$$R_n(x) = \frac{x(x-1)\cdots(x-n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \quad 0 \leq \xi \leq a \quad \dots\dots (11)$$

である。関係式(8)・(11)を用ひれば 最小自乗法の誤差が計算出来る。即ち  $k < n$  なる  $k$  に対して、

$$\begin{aligned} R_k(x) &= f(x) - \sum_{m=0}^k A_m P_m^{(n)}(x) \\ &= \sum_{m=k+1}^n A_m P_m^{(n)}(x) + \frac{x(x-1)\cdots(x-n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \quad \dots\dots (12) \end{aligned}$$

となる。

(23. 8. 5)