



Title	連続正則環の埋蔵定理
Author(s)	前田, 文友
Citation	全国紙上数学談話会. 1948, 2(12), p. 385-395
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75260
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

126. 連続正則環ノ埋藏定理

廣島文理大 前田文友 (1948. 11. 19)

連続正則環 R トハソノ主右イデヤル束 $\bar{R}_R$ カ連続模束即チ連続幾何学ニナツテ居ル環デアル。シカルニ連続幾何学ニ對シテハ 岩村氏 (本誌254号 (昭18) 日本数学雑誌 19 (昭19)) 及ビ河田・松島・樋口三氏 (本誌264号 (昭19)) ノ埋藏定理ガアル。連続模束 $\mathcal{L}$ ノ中心 Z ノ極大イデヤル $\mathcal{J}$ ノ全体ヨリナル Z ノ表現 ρ 有空間ヲ几トスル。岩村氏ハ $\mathcal{L}$ ノ各 ρ ノ次后トシテ Ω 一於テ定義セラレタ連続函数 $D(\rho) = \delta(\rho, \mathcal{J})$ ヲ導入シタ。河田氏等ハ $\mathcal{L}$ ノ極大中立イデヤル $\mathcal{J}$ ト Z ノ極大イデヤル $\mathcal{J}$ トハ一ノ對應ヲナシ (從ツテ $\mathcal{J}$ ノ全体モ Ω デアラウス) $\mathcal{L}$ ハ既約連続模束表 $\mathcal{L}/\mathcal{J}$ ノ積 $\prod (\mathcal{L}/\mathcal{J}; \mathcal{J} \in \Omega) =$ 埋藏サレルコトヲ示シタ。本誌ニ於テハ連続正則環 R ノ極大両側イデヤル $\mathcal{O}$ ト $\bar{R}_R$ ノ極大中立イデヤル $\mathcal{J}$ トガ一ノ對應ヲナノ (從ツテ $\mathcal{O}$ ノ全体モ Ω デアラウス) R ハ既約連続正則環 $R/\mathcal{O}$ ノ積 $\prod (R/\mathcal{O}; \mathcal{O} \in \Omega) =$ 埋藏サレルコトヲ示ス。

(以下 J. V. Neumann 連続幾何学講義 I, II, III ハ V. Neumann I, II, III ト略スル)

§1. 本節ニ於テハ $\mathcal{L}$ ハ連続模束トスル。

定理 1.1 $\mathcal{L}$ ノ各元 α ニ對シテ、次ノ性質ヲモツ Ω ニ於テハ連続函数 $\delta(\alpha, \mathcal{J})$ ガ存在スル。

- (1') $0 \leq \delta(\alpha, \mathcal{J}) \leq 1, \quad \delta(0, \mathcal{J}) = 0, \quad \delta(1, \mathcal{J}) = 1,$
- (2') $\mathcal{L}$ ノ中心 Z ニ對シテ $Z \in \mathcal{J}$ ナラバ $\delta(Z, \mathcal{J}) = 0$ $Z \notin \mathcal{J}$ ナラバ $\delta(Z, \mathcal{J}) = 1$
- (3) $\delta(\alpha + \beta, \mathcal{J}) \leq \delta(\alpha, \mathcal{J}) + \delta(\beta, \mathcal{J})$
- (4) $\alpha > 0$ ナラバ $\delta(\alpha, \mathcal{J}) > 0$ ナル $\mathcal{J}$ ガ存在スル。

コノ定理ハ岩村氏前掲論文ニヨツテ証明セラル。尚河田氏等談話 140頁定理3ノ証明モ本質的ニハ、コノ $\delta(\alpha, \mathcal{J})$ ノ存在ノ証明ニ外ナラナシ。河田氏等ノ方法ガ値ノ決定ツタ方ガ具體的デアル。 $\delta(\alpha, \mathcal{J})$ ノ性質トシテハ (1')—(4')以外ニモ無キナモノガアルカ、後ニ必要ナモノノミヲ掲ゲタ。

補題 1.1 L の各元 a へ実数値 $m(a)$ が定義セラレ.

$$(\alpha) \quad 0 \leq m(a) \leq 1, \quad m(0) = 0, \quad \dots, m(1) = 1,$$

$$(\beta) \quad L \text{ の中心元 } Z \text{ へ對シテハ } m(z) = 0 \text{ 又ハ } 1,$$

$$(\gamma) \quad m(a \vee b) + m(a \wedge b) = m(a) + m(b)$$

ナルトキ, $\mathcal{J} = (Z; m(z) = 0, z \in Z)$, $J = (a; m(a) = 0)$ トオケバ, $\mathcal{J}$ ハ中心 Z ノ極大中立いでやるニシテ, J ハ L ノ極大中立いでやるデアル. 尚 $a \in J$ ナルタメノ必要ニシテ充分ナル條件ハ, $n = 1, 2, \dots$ ニ對シテ $e_n \in \mathcal{J}$ ナルコトデアル.

コノ補題ハ河田氏等談話 [38頁 補題 3] ト同—デアル. e_n ニツイテハ同談話 P 136 (2) ニ定義セラレテイル.

定理 1.2 J ヲ L ノ極大中立いでやるトシ $\mathcal{J}$ ヲ L ノ中心 Z ノ極大中立いでやるトスル.

$$(1^\circ) \quad \mathcal{J}(J) = (Z; z \in J, z \in Z) \text{ ハ } Z \text{ ノ極大中立いでやるデアル.}$$

$$(2^\circ) \quad J(\mathcal{J}) = (a; \delta(a, \mathcal{J}) = 0) \text{ ハ } L \text{ ノ極大中立いでやるデアル.}$$

$$(3^\circ) \quad \mathcal{J}(J(\mathcal{J})) = \mathcal{J} \quad J(\mathcal{J}(J)) = J.$$

[証] (i) $\mathcal{J}(J)$ ハ Z ノ中立いでやるデ1ヲ含マナイコトハ明ラカデアル. L ノ $\mathcal{J}(J)$ ガ Z ノ極大中立いでやるデナイトスレバ, $\mathcal{J}(J) < \mathcal{Q} < Z$ ナルガ如キ Z ノ中立いでやる $\mathcal{Q}$ が存在スル. $\mathcal{Q}$ ニ含マレタアル—ソノ中心元 z ニヨツテ $0 \leq z < 1$ ナルガ如キ L ノ元 a ノ全体ヲ $I(\mathcal{Q})$ トスレバ, $I(\mathcal{Q})$ ハ L ノ中立いでやるデアル. $I(\mathcal{Q})$ ハ1ヲ含マス, 又 J ニ含マレナイ中心元ヲ含ムカラ $J < I(\mathcal{Q}) < L$. コレ J ガ L ノ極大中立いでやるデアルコトニ矛盾スル. 故ニ $\mathcal{J}(J)$ ハ L ノ極大中立いでやるデアル.

(ii) $\mathcal{J}$ ヲ固定スレバ $\delta(a, \mathcal{J})$ ハ補題 1.1 (α), (β) (γ) ヲ満足スルカラ $J(\mathcal{J})$ ハ L ノ極大中立いでやるデアル.

$$(iii) \quad z \in \mathcal{J} \Leftrightarrow \delta(z, \mathcal{J}) = 0 \Leftrightarrow z \in J(\mathcal{J}) \Leftrightarrow z \in \mathcal{J}(J(\mathcal{J}))$$

ナル故 $\mathcal{J} = \mathcal{J}(J(\mathcal{J}))$ デアル.

(iv) (i), (ii) ヲリ $J(\mathcal{J}(J))$ ハ L ノ極大中立いでやるデアル. $J \neq J(\mathcal{J}(J))$ トスレバ, 補題 1.1 ヲリアル $a \in J$ へ對シテ $e_n \notin \mathcal{J}(J)$ ナルガ如キルガアル.

$$e_n f = n e_n A a + C_n, \quad C_n \ll e_n A a$$

ヨリ $a \in J$ ナルトキハ $C_n \in J$ トナツテ $e_n f(J) = 0$ スル。故ニ
 $J = J(f(J))$ デアル。

[注意 1.1] コノ定理ハ河田氏等結定理 2 ト同一デアル。同所ニ於テハ
 $J(f) = (a; e_n \in f, n=1, 2, \dots)$ ト定義シテアルガ、補題 1.1 ヨリ上ノ (2°)
 ト一致スル。 $\delta(a, f)$ ヲ用イタカラ 証明ガ幾分簡單ニナツタ。

補題 1.2 L ノ各元 a ニ對シテ L ニ於ケル函数 $f_a(f)$ ガ定義セラレ。

$$(1^\circ) \quad 0 \leq f_a(f) \leq 1, \quad f_0(f) = 0, \quad f_1(f) = 1,$$

$$(2^\circ) \quad L \text{ ノ中心元 } z \text{ ニ對シテ, } z \in f \text{ ナラバ } f_z(f) = 0, \quad z \notin f \text{ ナラバ } f_z(f) = 1$$

$$(3^\circ) \quad f_{a+b}(f) + f_{a-b}(f) = f_a(f) + f_b(f)$$

ナル條件ヲ充タスナラバ、 $f_a(f)$ ハ一意ニ定マリ、 $f_a(f) = \delta(a, f)$ デアル。

(註) (i) 一ツノ f ヲトレバ $f = (z; f_z(f) = 0) = (z; \delta(z, f) = 0)$ デアルカラ
 補題 1.1 三 $f_a(f) = 0$ 。又 $\delta(a, f) = 0$ ナルタメノ必要ニ於テ充分ナル條
 件ハ 阿レモ $e_n \in f$ ($n=1, 2, \dots$) デアル。從ツテ $f_a(f) = 0$ ト $\delta(a, f) = 0$ ト
 ハ同義デアル。

(ii) L ノ極大中立イデヤル J ニ對シテ $a \in J$ ナラバ、 $a \vee b = (a \wedge b) \vee d$,
 $(a \wedge b) \wedge d = 0$ トスルバ $d \in J$ 。從ツテ定理 1.2 ヨリ $\delta(d, f(J)) = 0$ 三
 (i) ヨリ $f_a(f(J)) = 0$ 從ツテ $f_{a \vee b}(f(J)) = f_{a \wedge b}(f(J))$ デアルカラ
 $f_a(f(J)) = f_b(f(J))$

(iii) (ii) ニヨリ $m(a/J) = f_a(f(J))$ ト定義スルコトガ出來ル。シカルトキ
 $m(0/J) = 0$ $m(1/J) = 1$ デアルカラ、既約連續兩極束 L/J ニ對シテ
 V. Neumann I, Theorem 7.4, Cor 1.ヲ適用スルバ $m(a/J) = \delta(a, f(J))$ 。

コレハスベテノ J ニ對シテ成立スルカラ $f_a(f) = \delta(a, f)$ デアル。

(本補題ニツイテハ佐々木右左ニヨリ有力ナ助言ヲ与エラレタ)

補題 1.3 $a^* \in L$ ナルトキ $L^* = L(0, a^*)$ ヲ中心ハ $Z^* = (Z \wedge a^*,$
 $z \in Z)$ デアル (V. Neumann III Theorem 1.6) コノトキ $e(a^*)$ ヲ含
 マナイ Z ノ最大イデヤル f ト Z^* ノ最大イデヤル f^* トノ間ニハ

$$\mathfrak{f} \rightarrow \mathfrak{f}^* = (Z \cap \mathfrak{a}^*; Z \in \mathfrak{f}), \quad \mathfrak{f}^* \rightarrow \mathfrak{f} = (Z; Z \cap \mathfrak{a}^* \in \mathfrak{f}^*)$$

ナル関係ニヨツテ一対一ノ対応が存在スル。

(証) 客

定義 1.4 $a \in L^* \Rightarrow L(0, a^*)$ ナルトキ L ノ元トシテノ a ノ次元 $D(a) = \delta(a, \mathfrak{f})$ ト L^* ノ元トシテノ a ノ次元 $D^*(a) = \delta^*(a, \mathfrak{f}^*)$ トノ間ニハ次元ノ関係ガアル。

$$\delta^*(a, \mathfrak{f}^*) = \frac{\delta(a, \mathfrak{f})}{\delta(a^*, \mathfrak{f})} \quad (e(a^*) \notin \mathfrak{f})$$

但シ、 $\mathfrak{f}$ ト $\mathfrak{f}^*$ トハ補題 1.3 ニヨツテ修正スルモノデアル。

(証)

$$f_a(\mathfrak{f}^*) = \frac{\delta(a, \mathfrak{f})}{\delta(a^*, \mathfrak{f})}$$

トオケバ $f_a(\mathfrak{f}^*)$ ハ L^* ニ於テ補題 1.2ノ(1°), (3°)ヲ充タスコトハ明ラカデアル。次ニ L^* ノ中心元 $Z^* = Z \cap \mathfrak{a}^* =$ 對シテ

$$f_{Z^*}(\mathfrak{f}^*) = \frac{\delta(Z \cap \mathfrak{a}^*, \mathfrak{f})}{\delta(a^*, \mathfrak{f})} = \frac{\delta(Z, \mathfrak{f}) \wedge \delta(a^*, \mathfrak{f})}{\delta(a^*, \mathfrak{f})}$$

故ニ $Z^* \in \mathfrak{f}^*$ ナラバ $Z \in \mathfrak{f}$ デアルカラ $\delta(Z, \mathfrak{f}) = 0$ 即チ $f_{Z^*}(\mathfrak{f}^*) = 0$

又 $Z^* \notin \mathfrak{f}^*$ ナラバ $Z \notin \mathfrak{f}$ デアルカラ $\delta(Z, \mathfrak{f}) = 1$ 即チ $\delta_{Z^*}(\mathfrak{f}^*) = 1$

従ツテ補題 1.2ノ(2°)ガ成立スル。故ニ $f_a(\mathfrak{f}^*) = \delta^*(a, \mathfrak{f}^*)$ デアル。

(定義 1.2) 補題 1.3 ヨリ $\mathfrak{f}^* \leftrightarrow \mathfrak{f}$ デアルカラ $\delta^*(a, \mathfrak{f}^*)$ ヲ $\delta^*(a, \mathfrak{f})$ トカキテ差支エナイ。

§2 正則環 R ノ中心 $\mathfrak{f}$ ニ属スル零等元ノ全体 $\mathfrak{f}$ ハ一環デアリ $\eta \rightarrow (\eta)^*$ ナル対応ニヨツテ $\mathfrak{f}$ ハ $\overline{R}_R$ ノ中心 Z_R ト束同型デアル。シカルニ連続正則環 R ニ於テハ Z_R ハ元 $\mathfrak{f}$ ニ束テアルカラ $\mathfrak{f}$ モソウデアル。此 $\eta \leftrightarrow (\eta)^*$ ナル対応ニヨツテ $\mathfrak{f}$ ノ極大してやるト Z_R ノ極大してやるトハ一対一ノ対応ヲナスカラ。コレヲ同一ノ文字 $\mathfrak{f}$ デアラフス。

連続正則環 R ノ主右イデヤル束 $\overline{R}_R$ 及ビ主左イデヤル束 $\overline{L}_R$ ハ連続極束デアルカラ、 $(\alpha)\nu \in \overline{R}_R$ ニ對シテ次元函数 $D((\alpha)\nu)$ $(\alpha)e \in \overline{L}_R$ ニ對シテ次元函数 $D'((\alpha)e)$ カ定義サレル。コレ等ハ何レモ中心 Z_R ノ極大してやる $\mathfrak{f}$ 即チ $\mathfrak{f}$ ノ極大してやる $\mathfrak{f}$ ノ連続函数デアル。

以下 R は連続正則環トスル.

定義 2.1 R ノ元 $\alpha = \alpha \eta = \eta \alpha$ ヲ満足スル最小ノ $\mathcal{F}_e$ ノ元 η ヲ α ノ核心包トイフ. $\eta(\alpha)$ デアラフス.

補題 2.1 $\overline{R}_R = \text{終テ}$

$$(i) \quad e((\alpha)_r) = (\eta(\alpha))_r.$$

$$(ii) \quad (\alpha)_r \sim (\beta)_r \text{ ナラバ, } \eta(\alpha) = \eta(\beta)$$

$$(iii) \quad (\alpha)_r \text{ ト } (\beta)_r \text{ トノ間ニ因子対応ガアルナラバ } \eta(\alpha) = \eta(\beta)$$

($\overline{L}_R = \text{終テモ同様ニ成立スル. コレヲ補題 2.1 デアラフス 以下同様}$)

(註) (i) $(\alpha)_r \leq (\eta)_r$ ト $\alpha = \alpha \eta = \eta \alpha$ トハ同義デアルコトガ明カデアル.

(ii) $e((\alpha)_r) = e((\beta)_r)$ デアルカラ (i) ヨリ成立スル.

(iii) ϕ, ψ ヲ特殊因子トシ $\psi\phi = \varepsilon$ トオケバ $\forall$ Neumann II

Lemma 15.2 ヅ $(\alpha)_r = (\varepsilon)_r, (\beta)_r = (\phi)_r$ ノ $\psi \cdot \varepsilon = \phi$ デアル

$\psi\phi = \varepsilon, \phi\varepsilon = \phi$ ヨリ $(\varepsilon)_r = (\phi)_r$ デアル.

シカルトキハ (i), (i') ヨリ $\eta(\alpha) = \eta(\varepsilon), \eta(\beta) = \eta(\phi), \eta(\varepsilon) = \eta(\phi)$ ナル
故 $\eta(\alpha) = \eta(\beta)$ デアル.

補題 2.2 $\overline{R}_R$ ノ部分束 $L((0), (\alpha)_r)$ ノ中心ハ $(\eta(\alpha)_r; \eta \in \mathcal{F}_e)$ デアル.

(註) $\forall$ Neumann III Theorem 1.6, ヅ $L((0), (\alpha)_r)$ ノ中心ハ

$(\eta)_r \wedge (\alpha)_r; \eta \in \mathcal{F}_e$ ニシテ $(\eta)_r \wedge (\alpha)_r = (\eta(\alpha))_r$ デアル.

補題 2.3 $\overline{R}_R$ ノ二元 α ト β トノ間ニ因子対応ガ存在スルトキハ $D(\alpha) = D(\beta)$ デアル.

(註) (i) 補題 2.1 (iii) ノ証明ノ如ク $\alpha = (\varepsilon)_r, \beta = (\phi)_r; (\varepsilon)_r = (\phi)_r$ ナルガ如キ ε, ϕ ガ存在シ. ϕ, ψ ガリノ特殊因子デアル.

$\forall$ Neumann II Lemma 15.4 カラ $L((0), (\varepsilon)_r) \text{ ト } L((0), (\phi)_r)$ トノ束同型対応ガ存在スル 補題 2.2 ヅ $L((0), (\varepsilon)_r)$ ノ任意ノ中心元ハ $(\eta\varepsilon)_r (\eta \in \mathcal{F}_e)$ デアラフサル コレニ対応スル $L((0), (\phi)_r)$ ノ中心元ハ $(\phi\eta\varepsilon)_r = (\eta\phi\varepsilon)_r = (\eta\phi)_r$ デアル.

(ii) $L^* = L((0), \alpha)$ ハ連続補束デアルカラ. $L^* = \bigwedge_{\alpha \leq \beta} \beta$ ノ次元ハ補題 1.4 及ビ注意 1.2 カラ $\frac{\delta(\alpha, \beta)}{\delta(\alpha, \beta)}$ デアル. 假シ β ハ $\varepsilon(0)$ ヲ含まナイ.

Z_R / 極大理想であるデアルガ。補題 2.1 (i) カラ $\mathcal{F}$ は $\eta(\varepsilon)$ を含まない $\mathcal{F}_e$ / 極大理想であるト考エテヨイ。

(iii) $L^{**} = A((0), \mathcal{L})$ は L^* ト同型デアルカラ、 $\mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{L}$ ヲ $\mathcal{L}_0 =$ 対応スル主右理想であるトスレバ、 $\mathcal{L}_0 / L^{**} =$ 於ケル次元ハ $\mathcal{L}_0 / L^* =$ 於ケル次元 = 対応スルワケデアルガ。(i) = ヨリ L^* ト L^{**} トノ束同型対応 = 於テ相対応スル中心元ハ同一ノ $\eta \in \mathcal{F}_e$ デアラワサレ、補題 2.1 (iii) ヨリ $\eta(\varepsilon) = \eta(\phi)$ デアルカラ (ii) ヨリ

$$\frac{\delta(\mathcal{L}_0, \mathcal{F})}{\delta(\mathcal{L}, \mathcal{F})} = \frac{\delta(\mathcal{L}_0, \mathcal{F})}{\delta(\mathcal{L}, \mathcal{F})} \quad (\eta(\varepsilon) \notin \mathcal{F})$$

デアル。故ニ $\delta(\mathcal{L}_0, \mathcal{F}) = (\delta(\mathcal{L}_0, \mathcal{F}))$ 。即チ $D(\mathcal{L}_0) = CD(\mathcal{L}_0)$ ナルガ如キ常数 C ガ存在スル。

(iv) $\mathcal{L} = \mathcal{L}$ ナルトキハコノ神證ハ明カデアルカラ、 $\mathcal{L}$ キ $\mathcal{L}$ トスル 即チ例ハバ $\mathcal{L}$ 率 $\mathcal{L}$ トスレバ $\mathcal{L} \cap \mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}$ デアルカラ

$$(\mathcal{L} \cap \mathcal{L}) \cup \mathcal{L}_0 = \mathcal{L}, \quad (\mathcal{L} \cap \mathcal{L}) \cap \mathcal{L}_0 = (0)$$

ナル $\mathcal{L}_0$ ヲトレバ、 $\mathcal{L}_0 \supset (0)$ デアツテ、 $\mathcal{L}_0 \cap \mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}_0 \cap \mathcal{L} \cap \mathcal{L} = (0)$ デアル。 L^* ト L^{**} トノ間ノ因子束同型対応 = ヨツテ $\mathcal{L}_0 =$ 対応スル L^{**} ノ元ヲ $\mathcal{L}_0$ トスレバ、 $\mathcal{L}_0 \cap \mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{L}_0 \cap \mathcal{L} = (0)$ デアルカラ v. *Newman II Theorem 15.3* (c) ヨリ $\mathcal{L}_0 \sim \mathcal{L}_0$ デアル。従ツテ $D(\mathcal{L}_0) = D(\mathcal{L}_0)$ 故ニ (iii) = 於テ $C = 1$ 。即チ $D(\mathcal{L}) = D(\mathcal{L})$ デアル。

補題 2.4 $D((\alpha)_v) = D'((\alpha)_e)$

(証) (i) $(\alpha)_e = (\beta)_e$ トスレバ、 $\beta = \phi\alpha$, $\alpha = \psi\beta$ ナルガ如キ ϕ, ψ ガ存在スル。 $\alpha = \psi\phi\alpha$, $\beta = \phi\psi\alpha$ デアルカラ $(\alpha)_v$ ト $(\beta)_v$ トノ間ニハ ϕ, ψ ヲ因子トスル因子対応ガ存在スル。故ニ補題 2.3 ヨリ $\delta((\alpha)_v, \mathcal{F}) = \delta((\beta)_v, \mathcal{F})$ デアル。

(ii) (i) ヨリ $\overline{L}_R$ ノ元 $(\alpha)_e =$ 對シテ Ω ノミデ定義セラレタ函数

$$f((\alpha)_e, \mathcal{F}) = f((\alpha)_e, \mathcal{F})$$

$$f((\alpha)_e, \mathcal{F}) = \delta((\alpha)_v, \mathcal{F})$$

ヲ導入スルコトガ出来ル。シカルトキハ $0 \leq f((\alpha)_e, \mathcal{F}) \leq 1$, $f((0)_e, \mathcal{F}) = 0$, $f((1)_e, \mathcal{F}) = 1$ デアル。又 $\mathcal{F}_e$ ノ元 $\eta =$ 對シテ $(\eta)_* \in \mathcal{F}$ ナラバ $f((\eta)_e, \mathcal{F}) = 0$ 。

$(\eta)_x \notin \mathcal{F}$ ナラバ $f((\eta)_e, \mathcal{F}) = 1$ デアル.

次ニ任意ノ $(\alpha)_e, (\beta)_e$ ヲトク. $(\alpha)_e$ 及ビ $(\beta)_e = \sum_{i=1}^n (\alpha)_i \wedge (\beta)_i$ ノ
相対補元ヲ夫々 $(\delta)_e, (\delta')_e$ トスルバ

$$(\alpha)_e \vee (\beta)_e = ((\alpha)_e \wedge (\beta)_e) \vee (\delta)_e \vee (\delta')_e, \quad ((\alpha)_e \wedge (\beta)_e, (\delta)_e, (\delta')_e) \perp$$

$$\text{故ニ } (\alpha)_e \wedge (\beta)_e = (\varepsilon_1)_e, \quad (\delta)_e = (\varepsilon_2)_e, \quad (\delta')_e = (\varepsilon_3)_e, \quad \varepsilon_i \varepsilon_j = 0 \quad (i \neq j)$$

ナルガ如キ零等元 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ ガ存在シテ

$$(\alpha)_e = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)_e, \quad (\beta)_e = (\varepsilon_1 + \varepsilon_3)_e, \quad (\alpha)_e \vee (\beta)_e = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)_e$$

デアル. シカルトキハ.

$$\begin{aligned} f((\alpha)_e \vee (\beta)_e, \mathcal{F}) &= f((\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)_e, \mathcal{F}) = \delta((\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)_e, \mathcal{F}) \\ &= \delta((\varepsilon_1 + \varepsilon_2)_e, \mathcal{F}) + \delta((\varepsilon_1 + \varepsilon_3)_e, \mathcal{F}) - \delta((\varepsilon_1)_e, \mathcal{F}) \\ &= f((\varepsilon_1 + \varepsilon_2)_e, \mathcal{F}) + f((\varepsilon_1 + \varepsilon_3)_e, \mathcal{F}) - f((\varepsilon_1)_e, \mathcal{F}) \\ &= f((\alpha)_e, \mathcal{F}) + f((\beta)_e, \mathcal{F}) - f((\alpha)_e \wedge (\beta)_e, \mathcal{F}). \end{aligned}$$

故ニ補題1.2ヲ用スルバ $f((\alpha)_e, \mathcal{F}) = \delta'((\alpha)_e, \mathcal{F})$. 即チ

$$\delta((\alpha)_e, \mathcal{F}) = \delta'((\alpha)_e, \mathcal{F}) \text{ デアル.}$$

定義2.2 R ノ元 α ニ對シテ陪数 $R(\alpha) = r(\alpha, \mathcal{F})$ ヲ

$$R(\alpha) = D((\alpha)_v) = D'((\alpha)_e)$$

ニヨツテ定義スル.

R ガ既約ノ場合ハ $R(\alpha)$ ハ実数デアルガ 一般ニハ $R(\alpha)$ ハ $\mathcal{F}$ ノ極大理想ニ依
る $\mathcal{F}$ ノ連続函数デアル. シカシ *U. Neumann II Theorem 17.1* ノ証明
ハコノ場合モソノマニ適用サレル. 即チ可約連続正則環ノ場合モ形式的ニ既約連
続正則環ノ場合ト同様ナ性質ヲモツ陪数ガ定義サレル. ソノ中デ以下必要ナノハ
次ノ性質デアル.

定理2.1 (1°) $R(\alpha\beta) \leq R(\alpha), R(\beta)$. (2°) $R(\alpha + \beta) \leq R(\alpha) + R(\beta)$

3.3. 定理3.1 $\mathcal{O}$ ヲ R ノ極大両側理想ニトシ. $\mathcal{J}$ ヲ $\overline{R_R}$ ノ極大中立理想ニトスルバ.

(1) $\mathcal{J}(\mathcal{O}) = (\alpha)_v; (\alpha)_v \in \mathcal{O}$ ハ $\overline{R_R}$ ノ極大中立理想ニトスルバ.

(2) $\mathcal{O}(\mathcal{J}) = (\alpha; (\alpha)_v \in \mathcal{J})$ ハ R ノ極大両側理想ニトスルバ.

(3) $\mathcal{J}(\mathcal{O}(\mathcal{J})) = \mathcal{J}$, $\mathcal{O}(\mathcal{J}(\mathcal{O})) = \mathcal{O}$.

(証) (i) $\mathcal{O}$ が $\mathcal{R}$ の任意の両側理想であるトスレバ、 $J(\mathcal{O}) = (\alpha)_v; (\alpha)_v$
 $\mathcal{O}$ が $\overline{\mathcal{R}}_{\mathcal{R}}$ の理想であるナルトハ明カデアル。今 $(\alpha)_v \in \mathcal{O}$, $(\alpha)_v \sim (\beta)_v$
ナルトキ $(\alpha)_v, (\beta)_v$ の共通補元ヲ ϵ トスレバ

$$(\alpha)_v = (\epsilon)_v, \quad \epsilon = (1 - \epsilon)_v = (1 - \eta)_v \quad (\beta)_v = (\eta)_v$$

ナルガ如キ素数元 ϵ, η が存在スル。 $(1 - \epsilon)_v = (1 - \eta)_v$ ヨリ $(\epsilon)_v = (\eta)_v$
デアル。シカレトキハ $(\alpha)_v \in \mathcal{O}$ ヨリ $\epsilon, \eta \in \mathcal{O}$ デアルカラ。 $(\beta)_v \in \mathcal{O}$
故ニ $J(\mathcal{O})$ ハ $\overline{\mathcal{R}}_{\mathcal{R}}$ ノ中立理想である。

(ii) J が $\overline{\mathcal{R}}_{\mathcal{R}}$ ノ極大中立理想であるトスレバ、定理 1.2 ヨリ $\delta((\alpha)_v, \beta(J)) = 0$
ト $(\alpha)_v \in J$ トハ同義デアルカラ $\mathcal{O} \cap J = (\alpha)_v \mathcal{O}, \delta((\alpha)_v, \beta(J)) = 0$ デアル。
 $\alpha, \beta \in \mathcal{O}(J)$ ナラバ、 $(\beta)_v = (-\beta)_v$ デアルカラ定理 3.1 (2°) ヨリ

$$\alpha(\alpha - \beta, \beta(J)) \leq r(\alpha, \beta(J)) + r(\beta, \beta(J)) = 0$$

デアルカラ $\alpha - \beta \in \mathcal{O}(J)$ $\alpha \in \mathcal{O}(J)$ $\beta \in \mathcal{O}(J)$ ナラバ定理 2.1 (1°) ヨリ

$$r(\alpha, \beta(J)) \leq r(\alpha, \beta(J)) = 0 \quad r(\beta, \beta(J)) = r(\beta, \beta(J)) = 0$$

デアルカラ、 $\alpha, \beta \in \mathcal{O}(J)$ 。即チ $\mathcal{O}(J)$ ハ両側理想であるデアル。

(iii) J が $\overline{\mathcal{R}}_{\mathcal{R}}$ ノ極大中立理想であるトスレバ、(ii) ヨリ $\mathcal{O}(J)$ ハ $\mathcal{R}$ ノ両側理想であるデアル。

$$(\alpha)_v \in J \iff \alpha \in \mathcal{O}(J) \iff (\alpha)_v \in \mathcal{O}(J) \iff (\alpha)_v \in J(\mathcal{O}(J))$$

$$\text{故ニ} \quad J = J(\mathcal{O}(J)).$$

(iv) $\mathcal{O}$ が $\mathcal{R}$ ノ極大両側理想であるデアルトキ、 $J(\mathcal{O})$ が $\overline{\mathcal{R}}_{\mathcal{R}}$ ノ極大中立理想であるトスレバ $J(\mathcal{O}) < I$ ナルガ如キ $\overline{\mathcal{R}}_{\mathcal{R}}$ ノ極大中立理想が存在スル。

(ii) = ヨリ $\mathcal{O}(I)$ ハ $\mathcal{R}$ ノ両側理想であるデアル。 $\mathcal{O}(I) < \mathcal{R}$ デアル。

$\alpha \in \mathcal{O} \rightarrow (\alpha)_v \in \mathcal{O} \rightarrow (\alpha)_v \in J(\mathcal{O}) \rightarrow (\alpha)_v \in I \rightarrow \alpha \in \mathcal{O}(I)$
デアルカラ $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}(I)$ 。シカレニ $\mathcal{O}$ ハ極大ナルバ $\mathcal{O} = \mathcal{O}(I)$ 。故ニ (iii)
ヨリ $J(\mathcal{O}) = J(\mathcal{O}(I)) = I$ トナツテ仮定ニ反スル。従ツテ $J(\mathcal{O})$ ハ $\overline{\mathcal{R}}_{\mathcal{R}}$ ノ
極大中立理想である。

(v). $\mathcal{O}$ が $\mathcal{R}$ ノ極大両側理想であるトスレバ、(iv) ヨリ $J(\mathcal{O})$ ハ $\overline{\mathcal{R}}_{\mathcal{R}}$ ノ極大中立理想である。

でやるデアツテ

$$\alpha \in \mathcal{O}_R \iff (\alpha)_v \in \mathcal{O}_v \iff (\alpha)_v \in J(\mathcal{O}_v) \iff \alpha \in \mathcal{O}_R(J(\mathcal{O}_R))$$

故ニ $\mathcal{O}_R = \mathcal{O}_R(J(\mathcal{O}_R))$.

(VI) J が $\bar{R}_R$ の極大中間理想でやるナルトキ、 $\mathcal{O}_R$ が R の極大両側理想でやるニ、
デナイトスレバ、 $\mathcal{O}_R(J) < \mathcal{O}_R$ ナルガ如キ R の極大両側理想でやる者才存在スル。

$$(\alpha)_v \in J \rightarrow \alpha \in \mathcal{O}_R(J) \rightarrow \alpha \in \mathcal{O} \rightarrow (\alpha)_v \in \mathcal{O} \rightarrow (\alpha)_v \in J(\mathcal{O})$$

デアルカラ、 $J \subseteq J(\mathcal{O}) \subseteq \bar{R}_R$ シカルニ J ハ極大デアアルカラ $J = J(\mathcal{O})$

故ニ (V) ヨリ $\mathcal{O}_R(J) = \mathcal{O}_R(J(\mathcal{O})) = \mathcal{O}$ トナツテ仮定ニ反スル。従ツテ $\mathcal{O}_R(J)$
ハ R の極大両側理想でやるデアル。

補題 3.1 R は於テハ既約ト(両側)整域トハ同義デアル。

(証) 一般ニ重数環ハ既約ナルコトハ明カデアアル。(前講話“環ノ右理想でやる”
第 定理 3.1 参照) 次ニ連結正則整域ニ於テハ、定理 6.1 及ニ定理 1.2 ヨリ R
ノ極大両側理想でやる $\mathcal{O}_R$ ト $\bar{R}_R$ ノ極大中間理想でやる J ト Z_R ノ極大理想でやる $\mathcal{O}$ ト
ノ間ニ一対一ノ対応ガアル。前講話“環ノ右理想でやる”定記 J ガ $\mathcal{O}$ ガ既約
デアルトキハ、 $\bar{R}_R$ ハ既約デアアルカラ、 Z_R ハ (0) ト (1) ノミカラナル 故ニ $\mathcal{O}$ ハ (0)
ノミカラナリ $J = J(\mathcal{O})$ ハ (0) ノミヨリナル。従ツテ $\mathcal{O}_R(J)$ ハ (0) ノミデアアル。
故ニ R ハ既約デアアル。

補題 3.2 $\mathcal{O}_R$ ハ R の極大両側理想でやるトキ、 $J = J(\mathcal{O})$ ナ $\mathcal{O}_R$ ニ対応スル $\bar{R}_R$
ノ極大中間理想でやるトスル。剰余環 $R/\mathcal{O}_R$ ノ元ヲ $\mathcal{O}_R$ トスレバ $(\alpha/\mathcal{O}_R)_v \mapsto (\alpha)_v/J$
ナル対応ニヨツテ $\bar{R}_R/\mathcal{O}_R$ ハ $\bar{R}_R/J$ ニ同型デアアル。従ツテ $R/\mathcal{O}_R$ ハ既約正則
整域デアアル。

(証) (i) $R/\mathcal{O}_R$ ハ正則整域デアアルコトハ明カデアアルカラ $\bar{R}_R/\mathcal{O}_R$ ハ既約整域デアアル。
今 $(\alpha/\mathcal{O}_R) \in (\beta/\mathcal{O}_R)_v$ トスレバ $\alpha/\mathcal{O}_R = \beta/\mathcal{O}_R \cdot \chi/\mathcal{O}_R = \beta \chi/\mathcal{O}_R$ ナル $\chi/\mathcal{O}_R \in R$ ガ
存在スル。故ニ $\alpha \equiv \beta \chi \pmod{\mathcal{O}_R}$ 従ツテ $\alpha = \beta \chi + \gamma$ ナル $\gamma \in \mathcal{O}_R$ ガ存在スル。
シカルトキハ $(\alpha)_v \in (\beta)_v \cup (\gamma)_v$ ($\gamma)_v \in \mathcal{O}_R$ 即チ $(\gamma)_v \in J = J(\mathcal{O}_R)$ ナル
故 $(\alpha)_v/J \in (\beta)_v/J$ デアル。

(ii) 次ニ $(\alpha)_v/J \in (\beta)_v/J$ トスレバ、 $(\alpha)_v \in (\beta)_v \cup (\gamma)_v$ 、
 $(\alpha)_v - (\gamma)_v = (\beta)_v$ 、 $(\beta)_v \in (\gamma)_v$ ナル $(\gamma)_v \in J$ ガ存在スル。シカル
トキハ

$$(\alpha)_r = (\varepsilon)_r, (\zeta)_r = (\varepsilon_1)_r, (\beta)_r = (\eta)_r, (\zeta)_r = (\eta_1)_r.$$

$$\varepsilon\varepsilon_1 = \varepsilon, \varepsilon = 0, \eta\eta_1 = \eta, \eta = 0$$

ナラ 零等元 $\varepsilon, \varepsilon_1, \eta, \eta_1$ が存在シテ

$$(\varepsilon + \varepsilon_1)_r \subseteq (\eta + \eta_1)_r, \varepsilon_1, \eta_1 \in \mathcal{O} = \mathcal{O}(J)$$

デアル。故ニ

$\varepsilon + \varepsilon_1 = (\eta + \eta_1)(\varepsilon + \varepsilon_1) = \eta\varepsilon + \eta_1\varepsilon + \eta\varepsilon_1 + \eta_1\varepsilon_1$. $\eta_1\varepsilon + \eta\varepsilon_1 + \eta_1\varepsilon_1 \in \mathcal{O}$
 デアルカラ $\varepsilon \equiv \eta\varepsilon \pmod{\mathcal{O}}$ 即チ $\varepsilon/\mathcal{O} = \eta/\mathcal{O} \cdot \varepsilon/\mathcal{O}$ デアルカラ、

$$(\varepsilon/\mathcal{O})_r \subseteq (\eta/\mathcal{O})_r.$$

他方 $(\alpha)_r = (\varepsilon)_r$ ヨリ $\alpha = \varepsilon\lambda$, $\varepsilon = \alpha\chi$ ($\chi \in R$) デアルガ $\alpha/\mathcal{O} = \varepsilon/\mathcal{O} \cdot \lambda/\mathcal{O}$.

$$\varepsilon/\mathcal{O} = \alpha/\mathcal{O} \cdot \chi/\mathcal{O}. \text{ 故ニ } (\alpha/\mathcal{O})_r = (\varepsilon/\mathcal{O})_r. \text{ 同様ニ } (\beta/\mathcal{O})_r = (\eta/\mathcal{O})_r$$

従ツテ $(\alpha/\mathcal{O})_r \subseteq (\beta/\mathcal{O})_r$.

(iii) (i), (ii) ヨリ $\overline{R\alpha/\mathcal{O}}$ ト $\overline{R\beta/\mathcal{O}}$ トハ $(\alpha/\mathcal{O})_r \leftrightarrow (\beta/\mathcal{O})_r$ ナル関係
 ニヨツテ 一対一ノ対応ヲナシ、シカモソノ順序ヲ変ヘナイ。故ニ $\overline{R\alpha/\mathcal{O}}$ ハ
 $\overline{R\beta/\mathcal{O}}$ ト同型デアル。 $\overline{R\beta/\mathcal{O}}$ ハ既約連続補完環デアルカラ $\overline{R\alpha/\mathcal{O}}$ モソワデアル。
 即チ $R/\mathcal{O}$ ハ既約連続正則環デアル。

定義 3.1 環ノ集合 $(R_\lambda; \lambda \in I)$ ガ与エラレタトキ、 R_λ ($\lambda \in I$) = 居スル
 元 α_λ ノ組 $[\alpha_\lambda; \lambda \in I]$ ヲ考エ

$$[\alpha_\lambda; \lambda \in I] + [\beta_\lambda; \lambda \in I] = [\alpha_\lambda + \beta_\lambda; \lambda \in I]$$

$$[\alpha_\lambda; \lambda \in I] \cdot [\beta_\lambda; \lambda \in I] = [\alpha_\lambda \beta_\lambda; \lambda \in I]$$

ト定義スルトキハ $[\alpha_\lambda; \lambda \in I]$ ノ全体ハーツノ環ヲ作ル、コレヲ $(R_\lambda; \lambda \in I)$
 ノ直積ト云イ、 $\Pi(R_\lambda; \lambda \in I)$ デアラフス。

定義 3.2 (埋藏定理) 連続正則環 R ノ極大両側イデアル $\mathcal{O}$ ノ全体ヲ凡トス
 レバ、 R ハ既約(單純)連続正則環 $R/\mathcal{O}$ ノ直積 $\Pi(R/\mathcal{O}; \mathcal{O} \in \mathcal{J})$ ノ部分環
 ト同型デアル。

(証) 補題 3.2 ヨリ $R/\mathcal{O}$ ハ既約連続正則環デアル。 $\Pi(R/\mathcal{O}; \mathcal{O} \in \mathcal{J})$ ノ
 元ノ中一ツノ α ヲ用イテ $[\alpha/\mathcal{O}; \mathcal{O} \in \mathcal{J}]$ ノ如クアラフサレル元ノ全体ヲ R_0
 トスレバ R_0 ハ R ニ同型デアル。 次ニ $\alpha \neq 0$ トスレバ 定理 1.1 及ヒ定理
 1.2 ヨリ $(\alpha)_r$ ヲ含マナイ $\overline{R}$ ノ極大中間イデアル J_0 ガ存在スル。 シカレト
 キハ定理 3.1 ヨリ $\mathcal{O}_0 = \mathcal{O}(J_0)$ ハ α ヲ含マナイ。 故ニ $\alpha/\mathcal{O}_0 \neq 0/\mathcal{O}_0$ デアル。

従って $R \supset R_0$ トノ間ニハ一対一ノ對應ガアル。故ニ R_0 ハ R ニ同型デアル。

[注意 3.1] R ガ半単純環ノトキハ $\bar{R}_R$ ハ有限次元有限束デアルカラ R ハ連統正則環デアル。コノトキ Ω ハ有限集合ニナリ R ハ直積 $\prod (R/\mathfrak{a}_i; \mathfrak{a}_i \in \Omega)$ 自身ト同型ニナル。コノコトハ半単純環ハ有限個ノ單純ナ部分環ノ直和ニ分解セラレルコトヲ意味シテイル。