



Title	一様位相空間ノ上ノ函數ガ作ル束、環ニヨル一様位相ノ表現ニツイテ
Author(s)	長田, 潤一
Citation	全国紙上数学談話会. 1948, 2(12), p. 397-408
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75263
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

129. 一樣位相空間上ノ函數ガ作ル束, 環ニヨル一樣 位相ノ表現ニツイテ

長 田 滄 一 (1948.11.10)

bicompact 可附着性ヲ仮定セヌ *Completely regular* 空間ニ *Gelfand*
Silov 等ノ理論ヲ拡張シテニ一樣位相ヲ表現スルコトヲ試ミル.

0. 2. 空間 R ニオイテ ≥ 0 ナル連続函數ノ *sup* トシテアラワサレ、シカモ有界ナ
ル函數全体ヲ考ヘルトコレハ $\mathbb{R}$ ニヨリ束ヲナスコノ束ニハ正整数ノ *operator*
ガツイテアルト考ヘラレル. コノ束ヲ $L_S(R)$ デアラウス.

定理 I. R_1, R_2 ガ *homeomorphic* ナルタメ、必充條件ハ $L_S(R_1)$ ト $L_S(R_2)$
トガ *operation-isomorphic* ナルコトデアル.

Proof ガ必要ハ明カ.

$L_S(R)$ の operation テ動カヲ極大 ideal I ノワチソノ任意ノ部分集合 $A \in I$ ヲトルト $\sup_{f_\alpha \in A} f_\alpha$ ガ存在スレバ $\in I$ ナルモノヲ考ヘル (Lattice トシテノ sup. ハ函数トシテノ sup. トナツテ可ル) コノヨウナ ideal ヲ c.m. ideal ト云フコトニスル—点 a デ $0 \neq$ ナル函数 スベテノ 集合ハ $L_S(R)$ テ c.m. ideal ヲナス. コレヲ $I(a)$ トカク.

$I(a)$ ガ max. ナコトダケヲ云フ.

$I(a) \subset I \ni \psi, \psi(a) \neq 0$ ナラ. $\psi = \sup_{\alpha} f_\alpha$ ($f_\alpha \in I(a)$) トスル. 又 $f_\alpha \in I(a)$ ヲトルト $\psi(x) \geq f_\alpha(x) > \varepsilon > 0$ ($x \in U(a)$) ナル a ノ近傍 $U(a)$ ガアル.

$$g(a) = 0$$

$$g(x) = 1 \quad (x \in U^c(a)) \quad 0 \leq g \leq 1 \text{ ナル 連続函数 (Cont. fun.)}$$

$$g(x) \text{ ヲツクルト } g \in I(0) \subset I$$

$$I \ni \psi = \sup \{ \psi, g \} > \varepsilon \quad \therefore \varepsilon = \varepsilon \wedge \psi \in I$$

$$\therefore \forall \varepsilon \in I. L_S(R) \text{ ノ函数ハ何レモ有界ナル故 } I = L_S(R)$$

逆 = c.m. ideal I ハスベテ $I(a)$ ノ形トナル.

$$I = \{ f_\alpha \} \quad N_{\frac{1}{n}, \alpha} = \{ x \mid f_\alpha(x) \leq \frac{1}{n} \} \text{ トスル.}$$

$$N_{\frac{1}{n}, \alpha} \cap N_{\frac{1}{m}, \beta} \neq \emptyset$$

$$\textcircled{\times} = \emptyset \text{ トスルト } I \ni f_\alpha \sim f_\beta > \frac{1}{n} \wedge \frac{1}{m}$$

$$\therefore I = L_S(R) \text{ コレハ不合理}$$

ソシテ $N_{\frac{1}{n}, \alpha} \cap N_{\frac{1}{m}, \beta} \neq \emptyset$ ナル故 $\{ N_{\frac{1}{n}, \alpha} \} = \mathcal{N}$ ハ filter ヲナス.

コレカラ導カレル有向点集合 $\mathcal{P}(\mathcal{N})$ ヲ考ヘルト.

コノ上デハスベテノ $f_\alpha \rightarrow 0$ (即チ任意ノ $\varepsilon > 0$ ニ對シ $p > p_0$ ナラ $f_\alpha(p) < \varepsilon$ ナル p_0 ガアル)

モシモ $\mathcal{P}(\mathcal{N})$ ガ cluster pt a ヲモツトスル.

$$f_\alpha(a) = 0 \quad (\forall f_\alpha \in I) \quad \therefore I(1(a)) \quad \therefore I = I(a)$$

モシ cluster point ヲモタネバ.

R ノ各点 $x = U(x)$ ナル近傍ヲ封底サセ. $\mathcal{P}(\mathcal{N})$ ガ $U^c(x)$ デ residual ナル 如クデキル. 各 $U(x) = \emptyset$.

$$\left. \begin{array}{l} f_x(x) = 1 \\ f_x(y) = 0, (y \in U^c(x)) \end{array} \right\} 0 \leq f_x \leq 1 \text{ なる Cont. fun. } f_x$$
 ツツクルト $f_x \in I \quad (\forall x)$

$\therefore f_x \notin I$ ナラバ $\{f_x, I\} = J$ f_x, I ノ生成スル最小ノ operation-ideal) ツツクルト $J = \{f \mid f \leq n f_x \vee f_2, f_2 \in I, n: \text{正整数}\}$ ナルガ.

$J \not\subseteq I$ シカモ $J \ni \psi$ ナラ $\varphi(p \mid \mathcal{R})$ ノ上デ $\psi \rightarrow 0$ ナル故 $J + L_s(R)$ コレハ I ガ max ナルコトニ反ス. $\therefore f_x \in I$.

$\therefore I = \sup_{x \in R} f_x \in I \quad \therefore I = L_s(R)$. コレハ不合理.
 即チ $\varphi(p \mid \mathcal{R})$ ハ cluster pt. ヲモタスバナラヌ.

コレデ c. m. ideal ト $I(A)$ ナル形ノ ideal トハ一致スルコトガワカツタ.
 故ニ C m ideal ノ作ル達合 $\mathcal{L}(R)$ ヲ考ヘルト.

$\mathcal{L}(R)$ ト R トノ間ニ一対一ノ対応ガツク.

コノ $\mathcal{L}(R)$ ニ次ノ如ク値相ヲ入レル.

$R^* \cap A = \{I_x\}$ ノ每播点トツテ $\wedge I_x$ (I ナル点 (C. m. ideal) I ヲトル
 トスルト連続函数ノ理ノ場合ト同様ニ $\mathcal{L}(R)$ ト R ハ homeomorph ナル.

故ニ $L_s(R_1)$ ト $L_s(R_2)$ ノ operation-isomorph カラ $\mathcal{L}(P_1)$ ト $\mathcal{L}(R_2)$ トノ homeomorph.

従ツテ R_1 ト R_2 トノ homeomorph ガ従フ.

定理 I ノ証明終.

次ニ一様位相空間 R デ ≥ 0 ナル一様連続函数 (U. fun.) ノ sup トナリ有界ナル函数スバテガ作ル lattice ヲ $L_{us}(R)$ U. fun ノ非ル部分束ヲ $L_u(R)$ トアラフス $L_{us}(R) = L_{us}(F)$ ハ正整数ノ operator ガツイテモナルモト考ヘル.

定理 II 全有界ナ一様位相空間 R_1, R_2 ガ一様同相ナル必充條件ハ $L_u(R_1)$ ト $L_u(R_2)$ ガ対応シテキル如ク $L_{us}(R_1)$ ト $L_{us}(R_2)$ トガ operation-isomorph ナルコトデアル. (lattice 意味ノ sup. ハ full ノ意味ノ sup. ト一致シテモル)

Proof. 必要ハ明カ.

全有界ト照ラス最初一般ナ一様位相空間 R ニ於イテ考ヘル $L_c(R)$ ノ operation
 デ動カス *max. ideal* I ノウチ $I \supset A$ ナラ $\sup_{f_\alpha \in A} f_\alpha \in L_c(R)$ ($\sup$
 ハ $L_{us}(R)$ ニオケル意味) ナラバ $\sup_{f_\alpha \in A} f_\alpha \in I$ ナルモノ *c. m. ideal*ノ
 ヲ考ヘル. スルト定理 I ト略々同様ニ *c. m. ideal* ト $I(A)$ ナル形ノ *ideal*
 トハ一致スルコトガワカル. ソコデ *c. m. ideal*ノ作ル setヲ $\mathcal{L}(R)$ ト
 スル. ココニ R ト同相ニナル如ク位相ヲ入レ得ル事モ定理 I ト同様デアル.

次ニ一般ニ一様位相空間ノ二ツノ部分集合 A, B ガ

$$\varphi(x) = 0 \quad (x \in A)$$

$$= 1 \quad (x \in B) \quad 0 \leq \varphi \leq 1 \text{ ナル } \psi\text{-} \text{fun. (一様連続) ガア}$$

ルトキ (或ハ $S(A, m) \cap B = \emptyset$ ナル様ヒツク m ヲアルトキ) U - 分離
 デアルトイフ.

$\mathcal{L}(R)$ デ. ソノ部分集合 $\mathcal{L}(A), \mathcal{L}(B)$ (R デ各 A, B ニ対応スルモノ)

$\mathcal{L}(A) = \{I_\gamma\}, \mathcal{L}(B) = \{J_\delta\}$ トスルト $\neg I_\gamma$ ト $\neg J_\delta$ ガ $L_c(R)$
 ヲ生成スル. 即チ $\{\neg I_\gamma, \neg J_\delta\} = L$ ガ $L = L_c(R)$ テルトキソトキ
 ニ限リ $\mathcal{L}(A)$ ト $\mathcal{L}(B)$ トハ U - 分離デアルトイフコトニスルト

Lemma $\mathcal{L}(A), \mathcal{L}(B)$ ガ U - 分離ナコトト. A, B ガ U - 分離ナ
 コトトハ同値デアル.

Proof A, B ガ U - 分離 ナラバ.

$$A \subset U \quad B \subset V. \quad U \cap V = \emptyset$$

A, U^c 反ビ B, V^c ハソレゾレ U - 分リ

ナル U, V ガアル.

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= 0 \quad (x \in A) \\ &= 1 \quad (x \in U^c) \end{aligned} \right\} 0 \leq f \leq 1, \quad \left. \begin{aligned} g(x) &= 0 \quad (x \in B) \\ &= 1 \quad (x \in V^c) \end{aligned} \right\} 0 \leq g \leq 1$$

ナル U - *fun* f, g ヲツクルト.

$$f \in \neg I_\gamma, \quad g \in \neg J_\delta$$

$$\therefore 1 = f \vee g \in \{\neg I_\gamma, \neg J_\delta\} = L$$

$$\therefore L = L_c(R)$$

逆ノ方ハ $\{\neg I_\gamma, \neg J_\delta\} = \{f \mid f \leq f_1 \vee f_2, f_1 \in \neg I_\gamma, f_2 \in \neg J_\delta\}$

$$0 \leq f, f \text{ 有界 } U\text{-cont} \}$$

トナルコトニ注意シテ

A, BガU-分リデナイトスルトRノ Uniformity ヲ $\{m_x\}$ トスルト
 $S(B, m_x) \wedge A \Rightarrow \varphi(x)$ ナル有向点集合 $\varphi(x|y)$ ヲ考ヘル

$f_1 \in \cap I_r, f_2 \in \cap J_s$ トスルト $f_1(z) = 0 \quad (z \in A)$

$f_2 \wedge U, f_{un} = \text{シテ } f_2(B) = 0$ ナル故 $f_2(\varphi(z)) \rightarrow 0$
 $\therefore f_1 \cup f_2 \rightarrow 0 \quad (\varphi(x|y) \text{ノ上デ})$

即チ $L \cup f$ ナラバ $f(\varphi(x)) \rightarrow 0$ 故ニ $L \neq L_U(R)$

即チ $\mathcal{L}(A)$ ト $\mathcal{L}(B)$ トハU-分リデナイ.

以テ特ニRガ全有界ノ場合ヲ考ヘル.

$\mathcal{L}(R)$ ニ次ノ如ク一様位相ヲ入レル.

$\mathcal{L}(R)$ ノ開ヒフク $\mathcal{L}(r_c)$ ガ決ノ條件(T)ヲミタストキ. 一様ヒフク=トル.

(T) $\mathcal{L}(r_c)$ ハ次ノ如キ ϵ -refinement $\mathcal{L}(r_{c*})$ ヲモツ

$\mathcal{L}(r_{c*})$ ハ有限部分ヒフクヲモツ.

$S(\mathcal{L}(N_x), \mathcal{L}(r_{c*})) \subset \mathcal{L}(N) \quad (\mathcal{L}(N_x) \subset \mathcal{L}(r_{c*}), \mathcal{L}(N) \subset \mathcal{L}(r_c))$

トスルバ $\mathcal{L}(N_x)$ ト $\mathcal{L}(N)$ トハU-分リデアル.

スルト $\{\mathcal{L}(r_c)\}$ ノR=オケル像 $\{r_c\}$ ハ $\{m_x\}$ ト一致スル.

即チ Rト $\mathcal{L}(R)$ ノ一様位相=ナル.

Rノ任意ノ一様ヒフク m_x ヲトルト Rハ全有界ナル故

m_x, ϵ -refinement $m_y \in \{m_x\}$ ハ有限部分ヒフクヲモチ

$S(m_y, m_y) \subset m_x, (m_y \in m_y, m_x \in m_x)$ トスルト m_y ト m_x トハU-分リデアル.

従ツテ Lemmaニヨリ m_x ノ $\mathcal{L}(R)$ =オケル像 $\mathcal{L}(m_x)$ ハ条件(T)ヲミタス.

逆ニ(T)ヲミタス開ヒフク $\mathcal{L}(r_c)$ ノR=オケル像 r_c ハ $r_c \in \{m_x\}$ シレニハ $m_x \subset r_c; m_x \in \{m_x\}$ ナル m_x ガアルコトヲイフトヨイ. ンカラズトスルト. スベテノ x =對シ $S(\varphi(x), m_x) \not\subset N \quad (\forall N \in r_c)$ ナルRノ点 $\varphi(x)$ ヲ排除セシメ得ル. スルト $\varphi(x|y)$ ハ有向点集合ヲナス.

Lemmaニヨリ r_c モ(T)ヲミタスカラ(T)ノ star-refinement r_{c*} ヲトル. r_{c*} ハ有限部分ヒフクヲモツカス.

$\exists N_x \in r_{c*} : \varphi(x) \perp \text{confinal in } N_x$

$$S(N_k, \mathcal{N}_k) \subset N(\epsilon, \mathcal{N}) \text{ トスル}$$

任意ノ $x = \text{対シ}$ $\exists x' : \varphi(x') \in N_k, x' > x$

$$S(\varphi(x'), \mathcal{N}_{x'}) \cap N^c \neq \emptyset, \quad S(N_k, \mathcal{N}_k) \cap N^c = \emptyset$$

即チ $N_k \cap N^c \cap U$ - 분리テハナイ コレハ不合理

$$\therefore \mathcal{N}_k \in \{\mathcal{N}_x\}$$

故ニ 定理ノ條件ガナリクテバ $\mathcal{L}(R_1)$ ト $\mathcal{L}(R_2)$ トハ一樣同相. 従ツテ R_1 ト R_2 ハ一樣同相ニナル.

定理 II ノ証明終

定理 III. R ガ metric ノトキニハ 全有界デナクテモ 一般ニ 定理 II ガイハル.

Proof. $\mathcal{L}(R)$ ノ位相空間ヲ作ルコトハ 同ジ.

Lemma. ハヤハリ云ハル. $\mathcal{L}(R)$ ニ次ノ如ク一様位相ヲ入レル.

$\mathcal{L}(R)$ ノ開ヒフク $\mathcal{L}(\mathcal{N})$ カ次ノ條件ヲミタストキ一様ヒフクニナル

1. 次ノ如キ條件ヲミタス $\mathcal{L}(\mathcal{N})$ ノ $\ast$ -refinement $\mathcal{L}(\mathcal{N}_1)$

ソノ $\ast$ -refinement $\mathcal{L}(\mathcal{N}_2)$. ソノ $\ast$ -refinement $\mathcal{L}(\mathcal{N}_3)$

ヲミツ.

2. $S(\mathcal{L}(N_1), \mathcal{L}(\mathcal{N}_1)) \subset \mathcal{L}(N)$. ($\mathcal{L}(N_1) \in \mathcal{L}(\mathcal{N}_1)$, $\mathcal{L}(N) \in \mathcal{L}(\mathcal{N})$)

ナラ $\mathcal{L}(N_1)$ ト $\mathcal{L}^c(N)$ トハ U - 분리テアル.

3. $\{a_n\}$ ナル点列ガアリ $S(a_n, \mathcal{L}(\mathcal{N}_2)) \cap S(a_m, \mathcal{L}(\mathcal{N}_2)) = \emptyset$, ($m \neq n$)

ナラバ $\{a_n\}$ ノ交ラヌ部分集合 $\{b_p\}$, $\{c_q\}$ ヲトルト $\bigcup_p S(b_p, \mathcal{L}(\mathcal{N}_3))$

ト $S(c_q, \mathcal{L}(\mathcal{N}_3))$ トハ U - 분리テアル.

4. $\exists$ 点列ニオイト $\{a_n\}$ ト, $S^c(a_n, \mathcal{L}(\mathcal{N}_3))$ トハ U - 분리テアル

$\{\mathcal{L}(\mathcal{N})\}$ ノ R ニオケル像 $\{\mathcal{N}\}$ ガ R ノ一様ヒフク系ニナツテアルコトカ云ハルト
ヨイ.

$P/S_\epsilon(a) = \{x | P(x, a) < \epsilon\}$ ノツクル一様ヒフクヲ考ヘルト $\{S_{\frac{\epsilon}{4}}(a)\}$

$\{S_{\frac{\epsilon}{16}}(a)\}$, $\{S_{\frac{\epsilon}{32}}(a)\}$ ヲ $1 = \overline{\epsilon}$ フヒフクトシテトルトヨイ.

(例ハハ $S_{\frac{\epsilon}{32}}(a_n)$ ト $S_{\frac{\epsilon}{32}}(a_m)$ トノキヨリハ $\frac{\epsilon}{32}$ ヨリ $\overline{\epsilon} = 1$ トナリ)

3 ガナリタツテアル

逆ニ $\mathcal{L}(\mathcal{N})$ ガ 1-4 ヲミタシテアルトスルト $\mathcal{N} \in \{S_\epsilon(a)\}$ ナル ϵ ガアル
($\mathcal{N} \in 1-\varphi$ ヲミタシテアル)

⑤ シカラズトスルト $L = \cup \pi_1, \pi_2, \pi_3$ ヲ作ルト 任意ノ $\frac{1}{n} = \delta$ 對シ $S_{\frac{1}{n}}(a_n) \cap N(\forall n \in \mathbb{N})$ ナル a_n ヲ對應サセ. 点列 $\{a_n\}$ ヲ作り得ル. モノ $\{a_n\}$ カラ π_1 ノアル *clement* N_1 ノ中デ *residual* ナ部分点列 $\{a_{n_p}\}$ ヲ又キタセクトスルト

$S(N_1, \pi_1) \subset N(\forall n \in \mathbb{N})$ トスルト

$S_{\frac{1}{n_p}}(a_{n_p}) \cap N^c \neq \emptyset$ ナル故 N^c ト N_1 トハ U -分リデナイ. コレハ 2ニ反ス. 故ニ $\{a_{n_p}\}$ ノ如キモノハ又キザセナイ.

(1) $S(a_1, \pi_2) \cap S(a_{n_p}, \pi_2) \neq \emptyset$ ナル如キ a_{n_p} ハ有限コシカナイ

⑥ 無限ニアルトスルト.

$a_n \in S(S(a_1, \pi_2), \pi_2) \subset N_1(\in \pi_1)$ ナル故ニケナイ.

(1) ヲ満足セヌ点ヲ一ツトリ $a_{n_2} (a_1 = a_{n_1})$ トスル.

(1) ヲ満足セヌ点ノウチテ

(2) $S(a_{n_2}, \pi_2) \cap S(a_{n_p}, \pi_2) \neq \emptyset$ ナル a_{n_p} ハ有限コシカナイ (2) ヲ満足セヌモノヲ改メテ (a_{n_3}) トスル.

コノヨウニシテ $a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_p}, \dots$ ナル $\{a_n\}$ ノ部分点列ヲ又キタスト $S(a_{n_p}, \pi_2) \cap S(a_{n_q}, \pi_2) = \emptyset, (p \neq q)$

コレハ 3 ノ條件ヲミタシテアル. コノ $\{a_{n_0}\}$ ヲ改メテ $\{a_n\}$ トシルス.

($a_n \in \varepsilon_n (\varepsilon_n \rightarrow 0)$ ニ對應スル点デアル)

故ニ $\{a_n\} \cap \pi_3 = \emptyset$ 3.4 ガナリタツ筈デアル.

(S) $S_{\varepsilon_n}(a_n) \cap S(a_m, \pi_3) = \emptyset \left(\frac{n \neq m}{\forall m, n} \right)$ ナル n, m ガアル.

⑦ シカラズトスルト.

$S_{\varepsilon_{n_1}}(a_{n_1}) \cap S(a_{n_2}, \pi_3) \neq \emptyset$ トスルト $n_1, n_2 < n_3$ デ $S_{\varepsilon_{n_3}}(a_{n_3})$ ガ (S) ヲミタス相手ガ a_{n_1} 或 a_{n_2} ノミナレバ. タトハバ無数ニ多クノ n_2 ガ a_{n_2} ト (S) ヲミタストスルト $S(a_{n_1}, \pi_3) \cap \bigcup_p S(a_{n_p}, \pi_3) \neq \emptyset$ トハ U -分リデナイカラ 3ニ反スル.

故ニ n_3, n_2 (何レモ n_1, n_2 ト異ル) ガ (S) ヲミタストスル.

同様ニシテ互ニ異ル $a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_p}, \dots$ ヲトリ.

$S_{\varepsilon_{n_{p-1}}}(a_{n_{p-1}}) \cap S_{\varepsilon_{n_p}}(a_{n_p}, \pi_3) \neq \emptyset$ トチン得ル.

故 $= \{a_{n_{2p}}\} \vdash \{a_{n_{2p-1}}\}$ ヲトレバ. コレハ 3ニ反スルノデ不合理

故 $= (S)$ ノ如キ n_0 ガアル

$$S_{\varepsilon_n}(a_n) \cap S(a_m, r_{\varepsilon_3}) = \phi \quad (m \geq n_0, n \neq m)$$

シカルニ a_n ノ作り方ヨリ $S_{\varepsilon_n}(a_n) \cap S^c(a_m, r_{\varepsilon_3}) \neq \phi$

$$\text{故} = S_{\varepsilon_n}(a_n) \cap (\neg S^c(a_m, r_{\varepsilon_3})) \neq \phi \quad (n \geq n_0)$$

故 $= \{a_n\} \vdash \wedge S^c(a_m, r_{\varepsilon_3})$ トハ U-分リデナイ. コレハ 4ニ反ス. 故 $= \{S_\varepsilon(a)\} < r_\varepsilon + \varepsilon > 0$ ガ存在シ r_ε ハ Rニオケル一様コンパクトアル.

定理 III ノ証明終

定理 IV

Complete + metric space テハ R_1 ト R_2 ガ一様同相ナル爲ノ必要條件
ハソノ有界一致連続函数ノ作る位相環 $U(R_1), U(R_2)$ ガ位相同型ナコトデアル.

Proof. 必要ハ明カ.

$U(R)$ ノ *max ideal* ノウチ單項 *ideal* ノミ考ヘル (*ideal* トハ *closed* ノモノノミヲ云フコトニスル)

一点 $a \neq 0$ ナル有界 *u. fun.* スベテノ集リ $I(a)$ ハ單項 *max. ideal* デアル.

max. ideal ナコトハ明カダガ單項ナコトハ.

$I(a) \ni f(x) = \rho(a, x)$ ダガ, $I(a)$ ハ f デ生成サレル.

任意ノ $g(x) \in I(a)$ ニ對シ次ノ如キ $g_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) ヲツクル.

$$N_n = \{x \mid f(x) \leq \frac{1}{n}\} \text{ トスル.}$$

$$g_n(x) = g(x), \quad (\rho(x, N_n) \geq \frac{1}{n})$$

$$g_n(x) = n\rho(x, N_n)g(x), \quad (0 < \rho(x, N_n) \leq \frac{1}{n})$$

$$g_n(x) = 0 \quad (x \in N_n)$$

スルト $g_n(x)$ ハ有界 *u. cont.* デアル.

$$\rho(y, N_n) \leq \frac{1}{n}, \quad 0 < \rho(x, N_n) \leq \frac{1}{n}, \quad f(x, y) < \varepsilon \text{ ナラバ.}$$

$|g(x) - g(y)| < \delta$ トスル.

$$\frac{1}{n} \geq \rho(x, N_n) \geq \frac{1}{n} - \varepsilon \text{ ナル故}$$

$$|n\rho(x, N_n)g(x) - g(x)| = |n\rho(x, N_n) - 1| |g(x)| < n \cdot \varepsilon \cdot A \quad (|g| < A \text{ トスル}).$$

$$\therefore |g_n(x) - g_n(y)| \leq |g_n(x) - g(x)| + |g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + n \cdot \varepsilon \cdot A$$

他ノ場合ハ明カデ $g_n(x)$ ノ ∞ (無限) cont. ナコトガワカル.

$$\therefore g_n(x) \in I(a)$$

$$\text{ココデ } h_n(x) = \frac{g_n(x)}{f(x)} \quad (x \notin N_n)$$

$$= 0 \quad (x \in N_n) \text{ トナルト } h_n \in U(R)$$

$$\text{デ } f_n = h_n f.$$

ソシテ $g_n \rightarrow g$ トナル.

⑤ 任意ノ $\varepsilon > 0$ ニ對シ

$$f(x, 0) \leq \frac{1}{n} \text{ ナラ } |g(x)| < \varepsilon \text{ トナルト } (g(a) = 0 \text{ ガカラ})$$

$$x \in N_n \text{ ナラ } |g(x) - g_n(x)| = |g(x)| < \varepsilon$$

$$0 < p(x, N_n) \leq \frac{1}{n} \text{ ナラ } |g(x) - g_n(x)| = |g(x)| |np(x, N_n) - 1| \leq |g(x)| < \varepsilon$$

$$p(x, N_n) \geq \frac{1}{n} \text{ ナラ } g_n(x) = g(x)$$

即チ $g_n \rightarrow g$ 故ニ $I(a)$ ハ f デ生成サレル.

逆ニ量項 $\max$ ideal (closed) カアルト. ソレハ $I(a)$ ノ形ニナル.

エカ f カラ生成サレルトスルトアル点列 $\{a_p\}$ ノ上デ $f \rightarrow 0$ (ソカラザレバ $I = U(R)$ トナル) 任意ノ $g \in I$ トナルト $g_n f \rightarrow g$. コレカラ $g \rightarrow 0$

($\{a_p\}$ ノ上デ) ナコトガハル.

($\{a_p\}$ ノ上デ) ナコトガハル.

⑥ $g_n f$ ハ何レモ $\{a_p\}$ ノ上デ $\rightarrow 0$

$$\text{任意ノ } \varepsilon > 0 \text{ニ對シ } \exists n_0 : |g_{n_0} f - g| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|g_{n_0} f(a_p)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (p \geq p_0) \text{ トナルト}$$

$$p \geq p_0 \text{ ナラ } |g(a_p)| = |g(a_p) - g_{n_0} f(a_p) + g_{n_0} f(a_p)|$$

$$\leq |g(a_p) - g_{n_0} f(a_p)| + |g_{n_0} f(a_p)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

即チ $g \in \{a_p\}$ ノ上デ $\rightarrow 0$

$\{a_n\}$ カラ Cauchy sequence ガヌキダセタラ.

R ハ Complete ナル故 $a =$ 収斂シ. 従ツテ I ノ fun. ハ何レモ a デ 0 トナル即チ $I = I(a)$

ナリ.

モシヌキダセナイトキニハ $\{a_n\}$ ノ中カラ U -分リナル2ツノ部分列 $\{b_p\}$ ト $\{c_q\}$ ヲエラベル.

$\{b_p\}$ ノ上デ $\rightarrow 0$ ナル有界 $\cup$. *cont. fun* スベテノ集リハ *ideal* ヲナスガ.
コレヲ $I\{b_p\}$ トアラフスト $I \subset I\{b_p\}$

ス $\{b_p\}$ デ 0 , $\{c_q\}$ デ 1 ナル有界. $\cup$ *fun.* f ヲツクルト $f \notin I$
 $f \in I\{b_p\}$ ナル故 $I \neq I\{b_p\}$ デ I ノ *max* ナコトニ反ス.

故ニ $I = I(a)$ ナル形デアル.

ソコデ單項 *max. ideal (closed)* ノナス *set* ヲ $\mathcal{U}(R)$ デアラフスト
 R ト $\mathcal{U}(R)$ ノ間ニ一対一ノ対応ガツク.

$\mathcal{U}(R)$ = 位相. 一樣位相ヲ定理Ⅲト同様ニ入レ得テ R ト $\mathcal{U}(R)$ トガ一樣同相ニ
ナル.

(終) 1948. 10. 7

(別紙)

連続函数ノナス環 $C(R)$ = 次ノ如ク位相ヲ入レル.

$$A \subset C(R)$$

$$f \in \bar{A} \text{ ト } \wedge R \text{ ノ 任意ノ有限個ノ点 } a_1, \dots, a_n$$

$$\text{ニ對シ } g \in A, \quad f(a_i) = g(a_i) \quad (i=1, \dots, n)$$

ナル g ガ存在フルコトデアルトスル. スルト $C(R)$ $\wedge$ 位相環ニナル.

$$\bar{A} = \bar{A}$$

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B} \text{ ハ } \supset \text{ ハ明カ.}$$

$$C \text{ ハ } f \notin \bar{A} \cup \bar{B} \text{ ナラバ}$$

$$\exists a_1, \dots, a_n. \mid \forall g (g \in A), \exists a_i : f(a_i) \neq g(a_i)$$

$$\exists b_1, \dots, b_m \mid \forall h (h \in B), \exists b_j : f(b_j) \neq h(b_j)$$

$\{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m\}$ ヲ考ヘルト コノ上デ f ト一致スル函数ハ $A \cup B$ ノ

$$\Phi = \text{ハナシ. 即チ } f \notin \overline{A \cup B}, \quad \therefore \overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$\bar{A} \supset A \text{ ハ明カ.}$$

$$\bar{A} = \bar{A} \text{ ハ } f \in \bar{A} \text{ トスルト. 任イノ } a_1, \dots, a_n \text{ ト } R = \text{對シノ}$$

$$\exists g \mid g \in A, \quad g(a_i) = f(a_i) \quad (i=1, \dots, n)$$

コノ $g = \text{對シノ } h \in A; \quad h(a_i) = g(a_i) \quad (i=1, \dots, n)$ ナル h ガ存在スル.

$$\therefore h(a_i) = f(a_i) \quad (i=1, \dots, n), \quad \therefore f \in \bar{A} \text{ 故チ } \bar{A} = \bar{A}$$

$$\bar{f} = f \text{ モ明カ.}$$

積ト差ガ連続的ナコトハ

例ハバ積=ツイテ $fg = h$ トスルト,

h ノ任意ノ nbd $U(h)$ トスルト, $h \notin \overline{U^c(h)}$ ナル故.

$$\exists a_1, \dots, a_n \mid \forall \varphi (\varphi \in U(h)) \quad \exists a_i: h(a_i) \neq \varphi(a_i)$$

故ニ $h(a_i) = \varphi(a_i) \quad (i=1 \dots n)$ ナラバ $\varphi \in U(h)$

$$U(f) = \{ \varphi \mid \varphi(a_i) = f(a_i) \quad (i=1 \dots n) \}$$

$$U(g) = \{ \varphi \mid \varphi(a_i) = g(a_i), \quad (i=1 \dots n) \} \text{ トスルト}$$

$U(f) \cdot U(g)$ ハ各々 f, g ノ nbd ナル.

$$\varphi \in U(f), \quad \psi \in U(g) \text{ ナラバ } \varphi \cdot \psi \in U(h)$$

$$\therefore \varphi \cdot \psi(a_i) = f(a_i) \cdot g(a_i) = h(a_i) \quad (i=1 \dots n)$$

スルト $(R) =$ オイテ $\max$ ideal デ $closed$ ナモノヲ考ヘルト コレ

ハ $I(a) = \{ f \mid f(a) = 0 \}$ ナル形ノ ideal ト一致スル.

任意ノ $I(a)$ ヲ考ヘルト $\max$ ナコトハ明カダガ, $closed$ ナコトハ $f \in \overline{I(a)}$

ナラ $\exists g \in I(a) \mid f(a) = g(a)$

$$g(a) = 0 \quad \therefore f(a) = 0 \quad \therefore f \in I(a)$$

逆ニ $closed$ ナ $\max$ ideal I ガアルト

$L_S(R)$ 等ヲ考ヘタ時ト同様ニ I ノ函数ガスベテソノ上デ $\rightarrow 0$ トナル有向点

集合 $\varphi(X|U)$ ガアル $cluster \text{ pt } a$ ヲモテバ $I \subset I(a) \quad \therefore I = I(a)$

モタヌトスルト 任意ノ $a \in R =$ 対シ $\varphi(X|U)$ ガ $U^c(a)$ ノ中デ $residual$

ナル如キ a ノ nbd $U(a)$ カアル $U(a) =$ 合マレルスベテノ a ノ nbd $U_a(a)$

ヲ考ヘル. コノ $U_a(a) =$ 對シ

$$f_{U_a(a)}(a) = 1$$

$$f_{U_a(a)}(b) = 0, \quad (b \in U_a^c(a)) \text{ ナル連続函数 } f_{U_a(a)} \text{ ヲツクリト}$$

I ガ $\max$ ナコトカラ $f_{U_a(a)} \in I, \quad (\forall U_a(a))$

$$\therefore 1 \in \bar{I} = I. \quad \therefore I = C(R) \quad \text{コレハ不合理}$$

故ニスベテノ $closed$ ナ $\max$ ideal ノ集合 $\mathcal{C}(R)$ ト R ノ間ニハ一対一ノ対応

ガツク $L_S(R)$ ノ場合ト同様ニ位相ヲ入レルト. コノ對應ハ同相ニナル. 一樣

位相ヲ考エルニハ有界一樣連続函数ノ作る位相環 $U(R)$ ヲ考ヘルトヨイ. 故ニ.

定理 $C.R.$ 空間 (一樣位相空間) R_1 ト R_2 ガ同相 (一樣同相) ナルタメノ
必要ナル $metric$

必要条件ハ上ノ $C(R_1)$ ト $C(R_2)$ ($U(R_1)$ ト $U(R_2)$) ガ位相同型ナコトデ
 アル。

(終)