



Title	全微分方程式ノ積分ニ就テ (IV)
Author(s)	占部, 実
Citation	全国紙上数学談話会. 1948, 2(12), p. 408-415
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75264
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

130. 全微分方程式ノ積分ニ就テ (IV)

(広島文理大) 占 部 実 (1948.11.20)

§8. Mayer ノ方法トノ関係

本節ニ於テハ $\hat{X}_P$ トンテ又別ノ特別ノ函数系ヲ取り Mayer ノ方法ヲ用ルコトヲ示ス.

parameter $m^\mu (\mu = 2, 3, \dots, n-1)$ ヲ含ム函数 $\hat{X}(x, m^\mu)$

($\lambda = 2, 3, \dots, n-1$) ヲ取り. 是等ハ X^λ ニ關シ互ニ獨立ナルトスル.

m^μ ヲ相異ナル ($n-1$) 個ノ値ノ組ヲ $m_P^\mu (P = 1, 2, \dots, n-1)$ トシ.

$\hat{X} = \hat{X}(x, m_P^\mu)$ ヲ用ヒテ §0 ノ方法ヲ行フ. ソノタメニハ此ノ $\hat{X}_P$ ハ §0 ノ條件△若ハ條件 A ヲ満足シテオナクテハナラナイ. 即チ

$$D \equiv \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \dots & X_n \\ \frac{\partial \hat{X}}{\partial x^1} & \frac{\partial \hat{X}}{\partial x^2} & \dots & \frac{\partial \hat{X}}{\partial x^n} \\ \frac{\partial \hat{X}}{\partial x^1} & \frac{\partial \hat{X}}{\partial x^2} & \dots & \frac{\partial \hat{X}}{\partial x^n} \\ \frac{\partial \hat{X}}{\partial x^1} & \frac{\partial \hat{X}}{\partial x^2} & \dots & \frac{\partial \hat{X}}{\partial x^n} \end{pmatrix}$$

トスルトキ $\rho(D)$ ハ $m_P^\mu = m_P^\mu$ ノ時 ($n-1$) デナケレバナラス. 即チ

$\hat{X}(x, m_P^\mu)$ ハ先ツ次ノ條件ヲ満足シテオナクテハナラナイ.

[条件 ρ] $\rho(D) = n-1$

條件 ρ ガ成立スル m^μ ノ domain ヲ $\mathcal{M}_D$ デアラハス. 次ギニ §6 ノ一般論ニ從ヒ次式ノ積分ヲ考ヘル.

$$\left. \begin{aligned} \Omega &\equiv X_i dx^i = 0 \\ d\hat{X} &= d\hat{X}(x, m^\mu) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.1)$$

$m^\mu \in \mathcal{M}_D$ ナル時 (8.1) ハ互ニ獨立ナ ($n-1$) 個ノ方程式ノ組ヲアラハシ 從ツテ (8.1) ハ $\hat{X}(x, m^\mu) = \text{独立ナ integral}$ ヲ尚一ツ有スル. 其ヲ $f(x, m^\mu)$ トスル. 今 m_P^μ ガ全部相互ニ十分近い値デアルトスレバ $f(x_1, m_P^\mu)$ ハ m_P^μ ガ

m ノスベテノ値ヲ取ツタ時、常ニ $\chi(\lambda, m) = 0$ ナル如クスルコトが出来ル。
 (8.1) $\wedge m \in \mathcal{M}_D$ ナル m ニ対シテハ曲線ヲアラハス。此曲線ヲ $C(m)$ トスル。
 我々ハ此 $C(m)$ ヲ用ヒテ §6ノ方法ヲ行ハントスルノデアルガ其際ニ次ノ假定
 ヲオフ。即チ parameter m ノ相互ニ十分近キ値ノ範疇内ニ於テハ 相異
 ナル parameter m ノ値ニ対シテハ相異ナル曲線 $C(m)$ ガ対応スル。⁽¹⁾

是ノ條件ハ式デアラハセバ次ノ如クナルコトガ容易ニ証明サレル。即チ

[條件 M] 曲線 $C(m)$ 上ノ任意ノ二点 χ_a^i, χ_b^i ニ對シ

$$M = \det \left[\left[\frac{\partial \chi}{\partial m} \right]_{\chi=\chi_a^i} - \left[\frac{\partial \chi}{\partial m} \right]_{\chi=\chi_b^i} \right] \neq 0. \quad (8.2)$$

$\mathcal{M}_D$ 内ニ於テ條件 Mガ成立スル m ノ domain ヲ $\mathcal{M}$ トスル。

以下 $\chi(\lambda, m)$ ハ條件 f 及ヒ Mヲ満足スルトシ、 m ハ $\mathcal{M}$ 内ノ値ヲ取ルトスル。

$f(D) = n-1$ ヲリ及式ヲ満足スル如キ A^i ハ common factor ヲ

除イテハ uniqueニキマル。

$$\left. \begin{aligned} \chi_i A^i &= 0 \\ \frac{\partial \chi}{\partial \chi^i} A^i &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.3)$$

然ル時曲線 $C(m)$ ハ次式ヲ積分シテ得ラレルモノデアル。

$$\frac{d\chi^i}{A^i} = \frac{d\chi^2}{A^2} = \dots = \frac{d\chi^n}{A^n} (=dt \text{トオク})$$

(8.2)ニ於テ $\chi_b^i = \chi_a^i + d\chi^i$ トオケバ。

$$M = \det \left| \frac{\partial^2 \chi}{\partial \chi^i \partial m} d\chi^i \right| = (dt)^{n-2} \det \left| \frac{\partial^2 \chi}{\partial \chi^i \partial m} A^i \right|$$

サテ曲線 $C(m)$ ハ任意ノ点ヲ選ラシメ得ルカラ χ_b^i ハ全ク任意ノ点トシテヨイ。

然ルトキハ任意ノ χ^i ニ對シテ $m \in \mathcal{M}$ ナラバ

$$\det. \left| \frac{\partial^2 \chi}{\partial \chi^i \partial m} A^i \right| \neq 0. \quad (8.4)$$

(1) 此假定ヲオフコトニ依リ、後述スル如ク論議ハ非常ニ簡單ニナリ、§6ノ條件 Δモ必要

的ニ出テ来ル。此假定ヲオカナイ時ハ §6ノ條件 Δヲ又別ニ假定シテレバイケナイヨウナル。

是ヲ用ヒテ (8.8)ニ依リ定マル A^i ニ對シテ次号ヲ満足スル如キ χ, k ハ共ニ 0 ナルコトガ容易ニ証明出來ル。

$$\kappa \frac{\partial A^i}{\partial m} = k A^i \quad (8.5)$$

$\mathcal{M}$ 内ニ任意ニ m ヲ取リ m_v トスル。 m_v ニ十分近イ $\mathcal{M}$ 内ノ値 $m_v + \epsilon \xi_v^{\mu}$ ($v=2, 3, \dots, n-1$) ヲ取ル。此處デ ϵ ハ其絶對値ガ十分小ナル数トノ

ξ_v^{μ} ハ $\det. |\xi_v^{\mu}| \neq 0$ トスル。 $m_v + \epsilon \xi_v^{\mu} = m_v$ トオウ。 $m_v \in \mathcal{M}$ ヨリ $\int(D) = n-1$ m_v ニ對シテ $A^i \Rightarrow A^i(x, m_v)$ デアラハセバ

$A^i(x, m_v)$ ハ $m_v = m_v$ ニ對シテ (8.3)ヲ満足スル。然ルトキ $A^i(x, m_v)$, $A^i(x, m_v)$ ハ互ニ *linearly independent*ニナル。何トナレバ次式ヲ満足スル $\dot{\lambda}_i, \dot{\lambda}_i$ ガアツタトスル。

$$\dot{\lambda}_i A^i(x, m_v) + \dot{\lambda}_i A^i(x, m_v) = 0. \quad (8.6)$$

$\dot{\lambda}_i, \dot{\lambda}_i$ ハ $x, m_v, m_v = m_v + \epsilon \xi_v^{\mu}$ ノ函数デアルカラ 是等ヲ ϵ ニツキ *power series*ニ展開シ (8.6)ヲ書キナホセバ次ノ如クナル。

$$(\dot{\lambda}_0 + \dot{\lambda}_1 \epsilon + \dot{\lambda}_2 \epsilon^2 + \dots) A^i(x, m_v) + (\dot{\lambda}_0 + \dot{\lambda}_1 \epsilon + \dot{\lambda}_2 \epsilon^2 + \dots) \left\{ A^i(x, m_v) + \epsilon \left[\frac{\partial A^i}{\partial m} \right]_{m_v} \xi_v^{\mu} + \dots \right\} = 0 \quad (27)$$

$$\epsilon \text{ヲ舍テス項ヨリ} \quad \dot{\lambda}_0 + \sum_{v=2}^{n-1} \dot{\lambda}_0 = 0$$

$$\epsilon \text{ノ1次ノ項ヨリ} \quad (\dot{\lambda}_1 + \sum_{v=2}^{n-1} \dot{\lambda}_1) A^i(x, m_v) + \left[\frac{\partial A^i}{\partial m} \right]_{m_v} \dot{\lambda}_0 \xi_v^{\mu} = 0.$$

$$(8.5) \text{ヨリ} \quad \dot{\lambda}_0 \xi_v^{\mu} = 0, \quad \dot{\lambda}_1 + \sum_{v=2}^{n-1} \dot{\lambda}_1 = 0, \quad \text{ナテ} \det |\xi_v^{\mu}| \neq 0.$$

$\therefore \dot{\lambda}_0 = 0$. 從ツテ $\dot{\lambda}_0 = 0$. 然ルトキ (8.7)ニ於テ全体ヲ ϵ デ割ルバ再ビ (8.7)ト同形ノ式ヲ得ル。依テ上ト同様ニ又 $\dot{\lambda}_1 = \dot{\lambda}_1 = 0$

同様ノ手續キヲ繰返シテ結局 $\dot{\lambda} = 0, \dot{\lambda} = 0$. 即チ $A^i(x, m_v), A^i(x, m_v)$ ハ互ニ *linearly independent*ニナル。

是ヲ用ヒテ (8.8)ニ依リ定マル A^i ニ對シテ次号ヲ満足スル如キ χ, k ハ共ニ 0 ナルコトガ容易ニ証明出來ル。

$$\kappa \frac{\partial A^i}{\partial m} = k A^i \quad (8.5)$$

$\mathcal{M}$ 内ニ任意ニ m ヲ取り m_v トスル。 m_v ニ十分近イ $\mathcal{M}$ 内ノ値 $m_v + \epsilon \xi_v^{\mu}$ ($v=2, 3, \dots, n-1$) ヲ取ル。此処デ ϵ ハ 其絕對値ガ十分小ナル数トノ

ξ_v^{μ} ハ $\det. |\xi_v^{\mu}| \neq 0$ トスル。 $m_v + \epsilon \xi_v^{\mu} = m_v$ トオウ。 $m_v \in \mathcal{M}$ ヨリ $\int(D) = n-1$ m_v ニ對シテ $A^i \Rightarrow A^i(\chi, m_v)$ デアラハセバ

$A^i(\chi, m_v)$ ハ $m_v = m_v$ ニ對シテ (8.3)ヲ満足スル。然ルトキ $A^i(\chi, m_v)$, $A^i(\chi, m_v)$ ハ互ニ *linearly independent*ニナル。何トナレバ次式ヲ満足スル $\dot{\lambda}_i, \dot{\lambda}_v$ ガアツタトスル。

$$\dot{\lambda}_i A^i(\chi, m_v) + \dot{\lambda}_v A^v(\chi, m_v) = 0. \quad (8.6)$$

$\dot{\lambda}_i, \dot{\lambda}_v$ ハ $\chi, m_v, m_v = m_v + \epsilon \xi_v^{\mu}$ ノ函数デアルカラ 是等ヲ ϵ ニツキ *power series*ニ展開シ (8.6)ヲ書キナホセバ次ノ如クナル。

$$(\dot{\lambda}_0 + \dot{\lambda}_1 \epsilon + \dot{\lambda}_2 \epsilon^2 + \dots) A^i(\chi, m_v) + (\dot{\lambda}_0' + \dot{\lambda}_1' \epsilon + \dot{\lambda}_2' \epsilon^2 + \dots) \left\{ A^i(\chi, m_v) + \epsilon \left[\frac{\partial A^i}{\partial m} \right]_{m_v} \xi_v^{\mu} + \dots \right\} = 0 \quad (27)$$

$$\epsilon \text{ヲ舍テ又頂ヨリ} \quad \dot{\lambda}_0 + \sum_{v=2}^{n-1} \dot{\lambda}_0' = 0$$

$$\epsilon \text{ノ1次ノ項ヨリ} \quad (\dot{\lambda}_1 + \sum_{v=2}^{n-1} \dot{\lambda}_1') A^i(\chi, m_v) + \left[\frac{\partial A^i}{\partial m} \right]_{m_v} \dot{\lambda}_0' \xi_v^{\mu} = 0.$$

$$(8.5) \text{ヨリ} \quad \dot{\lambda}_0' \xi_v^{\mu} = 0, \quad \dot{\lambda}_1 + \sum_{v=2}^{n-1} \dot{\lambda}_1' = 0, \quad \text{サテ} \det |\xi_v^{\mu}| \neq 0.$$

$\therefore \dot{\lambda}_0' = 0$. 從ツテ $\dot{\lambda}_0 = 0$. 然ルトキ (8.7)ニ於テ全体ヲ ϵ デ割リバ再ビ (8.7)ト同形ノ式ヲ得ル。依テ上ト同様ニ又 $\dot{\lambda}_1 = \dot{\lambda}_1' = 0$

同様ノ手續キヲ繰返シテ結局 $\dot{\lambda} = 0, \dot{\lambda}' = 0$. 即チ $A^i(\chi, m_v), A^i(\chi, m_v)$ ハ互ニ *linearly independent*ニナル。

カクテ $\lambda(x, m)$ カ條件 f, M ヲ満足スル時ハ, M 内ニ適當ニ相互ニ十
分近イ値 m_p ($p=1, 2, \dots, n-1$) ヲエラビ, $\lambda_p \equiv \lambda(x, m_p)$ ガ §6 ノ條
件 A ヲ満足スル如クスルコトガ出來ル。

カクテ我々ハ此ノ λ_p ヲ用ヒテ §6 ノ方法ヲ行フコトガ出來ル, 即チ次ノ如
クデアル。

任意ニ一点 $P_0(x_0)$ ヲ取り 此点ヲ通ル曲線 $C(m_1)$ ヲ引キ $C(m_1)$ 上ニ他
ニ任意ニ一点 $P_1(x_1)$ ヲ取ル. $P_1(x_1)$ ヲ通ル曲線 $C(m_2)$ ヲ引キ 此上ニ他ニ
任意ニ一点 $P_2(x_2)$ ヲ取ル. 是ヲ順次繰返シテ点 $P_{n-1}(x_{n-1})$ ニ至ル. 然ル時
定等ノ点ノ座標ノ間ニ次ノ関係式が得ラレル。

$$\left. \begin{aligned} f(x_{p-1}, m_p) &= f(x_p, m_p), \\ \lambda(x_{p-1}, m_p) &= \lambda(x_p, m_p), \end{aligned} \right\} \quad (8.8)$$

取 $\Omega = 0$ ガ *integrable* ナル時ハ 其任意ノ *integral* ヲ $\varphi(x) = \text{const.}$ トスレバ (6.19) ヲ導出シタト同ジ理由ニ依リ次式ヲ得ル。

$$f = f\{\varphi(x), \lambda(x, m)\}. \quad (8.9)$$

而モ f ハ λ ニ独立ナルカラ $\frac{\partial f}{\partial \varphi} \neq 0$. §6 ノ一般論ヨリ 今ノ場合條件
 A ガ満足サレテアルカラ (8.8) ヲリ $x_1^i, \dots, x_{n-2}^i$ ヲ消去スルトキハ 得ラレ
タ消去式ハ $\varphi(x_0) = \varphi(x_{n-1}) = \text{algebraically equivalent}$ ニナ
ル. 取 (8.9) ノ關係ヲ用ヒレバ (8.8) ヲリ $\varphi(x_{p-1}) = \varphi(x_p)$ 是ハ (8.8)
ニ於テ m_p ヲ消去シタモノデアル。

取條件 M ヲリ $\lambda(x_{p-1}, m_p) = \lambda(x_p, m_p)$ ハ m_p ニ關シ互ニ独立デアル.
故ニ消去式ハ高々二ツデアル. 即チソノ消去式ハ必ズ $\varphi(x_{p-1}) = \varphi(x_p) =$
algebraically equivalent ニナル。

$x_1^i, \dots, x_{n-2}^i$ ヲ消去セルモノト同形ノ式デアル。

換言スレバ $p=1, 2, \dots, n-1$ ニ對スル (8.2) ヲリ $x_1^i, \dots, x_{n-2}^i$ ヲ消去スル
コトハ一ツノ (8.8) ヲリ m_p ヲ消去スルコトデオキカヘラレルコトニナリ, 次ノ
結果が得ラレタ事ニナル. 即チ

$\Omega = 0$ ガ *integrable* ナル時ハ, 其任意ノ *integral* ヲ $\varphi(x) = \text{const.}$

トスレバ $f(x_0, m) = f(x, m)$, $\chi(x_0, m) = \chi(x, m)$ ヨリ m ヲ消去スル時、消去式ハ一ツ唯一ツ存在シ。其ハ常 $= \varphi(x) = \varphi(x_0) = \text{定数}$ セシメルコトガ出来ル。

次ニ逆ヲ考ヘル。即チ條件 β , M ヲ満足スル函数 χ ヲ用ヒ m ニ属スル m ヲ取り $\Omega = 0$, $\alpha \chi(x, m) = 0$ ヲ積分シ $\chi(x, m) = \text{独立ナ}$
integral ヲ $f(x, m)$ トスル。然ルトキ

$$\left. \begin{aligned} f(x_0, m) &= f(x, m) \\ \chi(x_0, m) &= \chi(x, m) \end{aligned} \right\} \quad (8.10)$$

ヨリ m ヲ消去スル時、條件 $M = 0$ ヲ消去式ハ高々一ツトナル。此時消去式ガ $\phi(x_0) = \phi(x)$ ノ形トナルナラバ $\Omega = 0$ ハ *integrable* ニシテ $\phi(x) = \text{const.}$ ガ共ノ *integral* トナルコトヲ証明スルコトガ出来ル。

証明ハ次ノ通り。

條件 β, M ガ成立スルカラ m 内 $m = m_1 = m_2 = \dots = m_{n-1}$ (十分近い値 m_p ($p=2, 3, \dots, n-1$)) ヲ取り m_p カラ作ツタ $\chi_p = \chi(x, m_p)$ ($p=1, \dots, n-1$) ハ §6ノ條件 A ヲ満足スル如クナルコトガ出来ル。ソシテ (8.10)ノ $f(x, m)$ ハ m ガ是等 m_p ノ値ノ時 $\chi(x, m_p) = \chi(x, m)$ ニ独立ナル。然ルトキ此 m_p ヲ用ヒテ曲線 C_p ヲ作り。任意ノ点 $P_0(x_0)$ カラ出發シテ (8.8) ヲ作ツタト同様ニシテ点 $P_1(x_1), P_2(x_2), \dots, P_{n-1}(x_{n-1})$ ヲ作ル。然ルトキ其等ノ点ノ座標ノ間ニ (8.8)ノ關係式ヲ得ル。サテ (8.10)ヨリ m ヲ消去セル結果ガ $\phi(x_0) = \phi(x)$ ナル故 (8.8)ヨリ m_p ヲ消去スレバ $\phi(x_{p-1}) = \phi(x_p)$ ヲ得ル。然ルトキ $p=1, 2, \dots, n-1$ トスレバ $\phi(x_0) = \phi(x_{n-1})$ ヲ得ル。即チ (8.8) ヨリ $x_1, \dots, x_{n-1}$ ヲ消去シテ $\phi(x_0) = \phi(x_{n-1})$ ヲ得ル。然ルトキ §6ノ條件 A ガ成立シテサルカラ $\Omega = 0$ ハ *integrable* トナリ 其時 $\phi(x) = \text{const.}$ ガ $\Omega = 0$ ノ *integral* トナル。

カクテ次ノ結果ガ得ラレタ事ナル。

$\Omega = 0$ ガ *integrable* ナルタメノ必要ニシテ且十分ナル條件ハ (8.10)ヨリ m ヲ消去セル結果ガ $\phi(x_0) = \phi(x)$ ノ形トナルコトデアル。ソシテコノ時得ラレタ $\phi(x) = \text{const.}$ ガ求ムル $\Omega = 0$ ノ *integral* トナル。

上記ノ方法ニ依リテハ $\Omega = 0$ ノ *integral* ヲ求ムルニ當テ $\Omega = 0$,
 $d\tilde{\chi}^{\lambda}(x, \tilde{m}) = 0$ ヲ唯一回積分スルコトニヨツテ解ヲ得ルコトガ出來ル。

但ノ方法—*Natani*ノ方法—段ノ*Reymond*ノ方法等ガ $(n-1)$ 回ノ
 積分ヲ要スルニ比シ非常ニ簡單ナル。

條件 β, M ヲ満足スル函数ノ中特ニ簡單ナモノトシテハ 例ヘバ次ノ如キモノ
 ガアル。

$$\tilde{\chi}^{\lambda} = x^{\lambda} - x^n \tilde{m}^{\lambda} \quad (\lambda = 2, 3, \dots, n-1). \quad (8.11)$$

是ガ條件 β, M ヲ満足スルコトハ容易ニ証明サレル。是ヲ用ヒテ。

$\Omega = 0$ ヲ解クニハ

$$\tilde{\chi}^{\lambda}(x, \tilde{m}) = x^{\lambda} - x^n \tilde{m}^{\lambda} = \tilde{\chi}^{\lambda}(x_0, \tilde{m}) = x_0^{\lambda} - x_0^n \tilde{m}^{\lambda}$$

$$\therefore x^{\lambda} = x_0^{\lambda} + (x^n - x_0^n) \tilde{m}^{\lambda}$$

是ヲ $\Omega = X_i dx^i = 0$ ニ代入シ。

$$X_1 dx^1 + (X_n \tilde{m}^{\lambda} + X_{\lambda}) dx^n = 0.$$

此處デハ変数ハ x^1 及ビ x^n ノミトナル。是ノ *integral* f ハ $X_1 \neq 0$ ヨ
 リ x^1 ヲ含ム。故ニ $\tilde{\chi}^{\lambda} = \text{const.}$ デアル。次式ヨリ $\tilde{m}^{\lambda}$ ヲ消去スル。

$$\left. \begin{aligned} f(x, \tilde{m}) &= f(x_0, \tilde{m}) \\ x^{\lambda} - x^n \tilde{m}^{\lambda} &= x_0^{\lambda} - x_0^n \tilde{m}^{\lambda} \end{aligned} \right\}$$

消去ノ結果ハ $\Omega = 0$ ガ *integrable* ナル時ハ、其ノ任意ノ *integral*
 ヲ $\varphi(x) = \text{const.}$ トスレバ必ズ $\varphi(x_0) = \varphi(x) = \text{const.}$ セシメルコトガ出來ル。

又是ニ消去式ガ $\varphi(x_0) = \varphi(x)$ ノ形トナルナラバ $\Omega = 0$ ハ *integrable*
 ニシテ其時得ラレタ $\varphi(x) = \text{const.}$ ガ $\Omega = 0$ ノ *integral* トナル。

(8.11)ノ $\tilde{\chi}^{\lambda}$ ヲ採用シ上ノ如クシテ $\Omega = 0$ ヲ解ク方法ハ即チ *Mayer*ノ方
 法ナル。

以上前節及ビ本節ニ於テ我ワハ *Natani*ノ方法、*Mayer*ノ方法ハ何レモ
*Reymond*ノ方法ニ於テ $\tilde{\chi}_p^{\lambda}$ トシテ特別ノモノヲ選ンダ場合ナルコトヲ示
 シタ。カクテ此等ノ方法ヲ *Reymond*ノ立場カラ統一的ニ見ルコトガ可能
 トナツタ。

§9 全微分方程式系ハノ拡張

36ノ議論ハ全微分方程式ノ系ニ迄拡張出来ル。証明ハ大体同様デアルカラ結果ノミヲ述ベヨウ。

全微分方程式ノ系

$$\tilde{\Omega} \equiv \sum_i \dot{X}_i \delta x^i = 0 \quad (i=1, \dots, m, m < n)$$

ヲ考ヘル。函数系 $\sum_p^{\lambda} X_p$ ($p=1, 2, \dots, \ell=n-m; \lambda=m+1, \dots, n-1$)ヲ取リ次ノ如クオク

$$D_p \equiv \begin{pmatrix} \dot{X}_1 & & \dot{X}_n \\ \vdots & & \vdots \\ \dot{X}_m & & \dot{X}_n \\ \frac{\partial X_p}{\partial x^1} & & \frac{\partial X_p}{\partial x^n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial X_p}{\partial x^{\lambda-1}} & \dots & \frac{\partial X_p}{\partial x^n} \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \begin{pmatrix} D_1^{-1} & 0 & & 0 \\ -D_2 & D_2 & 0 & \\ 0 & -D_3 & D_3 & \\ \vdots & & & \\ 0 & \dots & -D_{\ell} & D_{\ell} \\ 0 & \dots & 0 & -D_{\ell}' \end{pmatrix}$$

但シ D_p ハ D_p ヨリ其ノ第1, 2, ..., m 行ヲ除イテ得ル matrix ヲアハス。

其ノ函数系 $\sum_p^{\lambda} X_p$ ニ對シテハ Δ キ0トスル。

然ル時 $\tilde{\Omega} = 0$, $\sum_p^{\lambda} X_p = 0$, integralノ由 $\sum_p^{\lambda} X_p$ ニ独立ナ integralカ m 個存在スル。其ヲ $\int$ トスル。然ルトキ我々ハ §6ノ同様ニ次ノ結果ヲ得ル。即チ。

$\tilde{\Omega} = 0$ ガ integrableナルヲメノ必要ニシテ且ツ十分ノ條件ハ

$$\left. \begin{aligned} \tilde{f}_P^{\alpha}(X^i) &= \tilde{f}_P^{\alpha}(X_P^i) \\ \tilde{\chi}_P^{\lambda}(X^i) &= \tilde{\chi}_P^{\lambda}(X_F^i) \end{aligned} \right\} (p=1,2,\dots,\ell)$$

ヨリ $X_1^i, \dots, X_{\ell}^i$ ヲ消去スル時 消去式ガ $\tilde{\phi}(X^i) = \tilde{\phi}(X_{\ell}^i)$ ノ形トナルコ
トデアル。ソシテ此時得ラレタ $\tilde{\phi}(X^i) = \text{const.}$ ガ求ムル $\tilde{\Omega} = 0$,
integral トオル。

〔終〕