



Title	カノ平行四辺形則ニツイテ
Author(s)	石原, 忠重
Citation	全国紙上数学談話会. 1949, 2(13), p. 417-424
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75265
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

131. カノ平行四辺形則ニツイテ

(阪大) 石原 忠 重 (1948. 11. 23)

コノ小稿ノ内容ハ物理学的ニハカノ平行四辺形則ヲヤヤー船ニ 即チ通常経験律トシテ 探宥サンニアル既仮定ヲカナリユルクソテ導ク試ミデアリ. 数学的ニハ E^2 Space / *Euclid. metrik* ニ従フ *Vector Space* ガ別ノ意味デノ 結合ニ關シテモ *Vector Space* ヲ作ツテ居ル時コノ兩者ノ 關係, ソノ一致ノ 爲ノ條件ヲ求メテ見ル事デアル. (註1) (註2)

E^2 ノ原点カラノ任意ノ *Vektor* ヲカトシ. 合力ヲ作レ(9) トイフ加法ト実数トノ作用 (10) デ表ハス) トデ *Vektor Raum* ヲ作レルトスル. E^2 ノ *metrik* ニ従フ *Vektor* ノ加法ヲ(+) 実数倍ヲ() デ表ハス.

公理 (1)-(3) ハ $\oplus$ *modul* (4)-(7) ハ 0 ノ作用素トシテノ *axiom* (10) $\alpha \cdot \alpha = \alpha$ ハ仮定シテ居ナイ. モアル

Operator (1) ト(+) 加法ニツイテハ. 改メテ舊ク事ハシナカツタ.

Axiom (3) ハ + 及 $\oplus$ 両 *modul* , *nullelement* , 一致ノ仮定 (9) ハ $\{\lambda \cdot \alpha \mid \lambda \in \text{Real}\}$ ノ集合ノ直線性ノ結果ヲ偶ルニ主要ナ *axiom* デアリ (10) ハ *Operator* α ノ有界性デ $\lambda \cdot \alpha$ ノ λ ニ対スル連続性ヲ導ク. 公理 (11) ハ次元ニ關シタル公理デアリ. (12) ハ *Symmetry + vector* ノ含カナシ

註1. E. Mach ハソノカノ発達トソノ歴史的批判的考察」ニ於テ *Principien* ニオケル諸定義乃至基礎經驗律ヲ批判シ警鳴ンテアルガ. ソノ中デ「『*axiom*』ノ物体 A, B, C ガ物体トニ及ボス和速度ハ互ニ無關係デアル』(カノ合成ニ則ハ之ヨリ百ニ算カレル.)」ト述ベテ居ル. 明瞭ノ論議ガ外ニモ 勇出アレルガ Mach ノ云フ互ニ無關係トハトワイフ事デアロウカ? トニカク「カノ幾何結合性ノミカラデハ平行四辺形則ハ出テ来ナイ. 本稿本稿ノ反例ニソレハ明テアル.

註2. 数学的ナ術語ノ意味デハモット一般ナ區域カ色クモハラレルデアロウ.

(次元, *metrik*, *Operator bereich* 等)

楕線上ニ來ルトイフ假定デアル。最初 (1) - (7) マデノ假定カラ得ラレル結果ヲ列記シ、及イデ (8), (9), (10) ヲ加ヘタ。之デ可成ノ結果ガ得ラレルガ未ダ不充分ナ事ハ後述ノ反例デ解ル。(11), (12) ヲ加ヘ平行四辺形則ニ到達スルガ (11) ハ満足セズ。他ハ満足シテ平行四辺形則ノ成立タヌ例。及 (12) 以外ヲ有タシ平行四辺形則ノ成立タヌ例及 (9) ヲミタサヌ反例ガアゲラレル。最後ニ (11) 以下ノ公理ト同等ノ公理ヲ二三考ヘテ見タ。之等ハ勿論 (1) - (10) マデノ假定ナシデハ同等ザハ有リ得ナイ。公理系ノ整理、其包檢討スル余地ハ色々アルガニ應コノ辺デ繰メテ見タ。

以下ドイツ文字ハ *vektor*, キリンア文字ハ実数トスル。

公理系

$$\begin{cases}
 (1) \quad \forall \alpha, \beta \quad \exists \gamma : \alpha \oplus \beta = \gamma \\
 (2) \quad (\alpha \oplus \beta) \oplus \gamma = \alpha \oplus (\beta \oplus \gamma) \\
 (3) \quad \alpha \oplus \beta = \beta \oplus \alpha \\
 (4) \quad \forall \alpha, \forall \lambda, \exists \gamma : \gamma = \lambda \circ \alpha \\
 (5) \quad (\lambda \mu) \circ \alpha = \lambda \circ (\mu \circ \alpha) \\
 (6) \quad \lambda \circ (\alpha \oplus \beta) = \lambda \circ \alpha \oplus \lambda \circ \beta \\
 (7) \quad (\lambda + \mu) \circ \alpha = \lambda \circ \alpha \oplus \mu \circ \alpha \\
 (8) \quad 0 = 0 \quad (但 \alpha \oplus 0 = \alpha \quad \alpha + 0 = \alpha) \\
 (9) \quad \lambda \circ \alpha \oplus \mu \circ \alpha = (\lambda + \mu) \circ \alpha \\
 (10) \quad \forall \alpha, \forall \lambda, |\lambda| < |\lambda_0| \quad \exists f(\lambda, \alpha) \quad (|\lambda| \text{ハ絶対値}) \\
 \quad |\lambda \circ \alpha| < \rho \quad (|\cdot| \text{ハ Euklidische metrik}) \\
 \quad = \exists \lambda \text{ Vektorノ長サ}
 \end{cases}$$

(11) 少クモニツノ一次独立 (E^2 , (+), ノイミデ) + $1 \circ \alpha$ 及 $1 \circ \beta$ ガ存在スル。

(12) α ト α' ガ (E^2 , (+), ノイミデ) β ニ同シ 対稱ナラバ $\exists \lambda \geq 0$
 $\alpha \oplus \alpha' = \lambda \beta$ (但 β ハ α 及 α' ノ劣交角ノ向 (直交モ含ム) ノ *Vektor*)

最初 (1) カラ (7) マデカラ 次ノ諸性質ガ得ラレル。

$$1^\circ \quad 0 \circ \alpha = 0$$

$$2^\circ (-1) \circ \alpha = \ominus (1 \circ \alpha) \quad (\text{但以下 } \ominus \alpha, \alpha \oplus \gamma = 0, \gamma \text{ヲ表ハス})$$

$$3^\circ 1 \circ 0 = 0$$

$$4^\circ (\lambda - \mu) \circ \alpha = \lambda \circ \alpha \oplus (\ominus (\mu \circ \alpha)) = \lambda \circ \alpha \ominus \mu \circ \alpha \quad (\text{以下 } \ominus \alpha \text{ヲ表ス})$$

$$5^\circ 1 \circ \alpha = \bar{\alpha} \text{ト以下書ク事} = \text{スルベ公理(5)ノミカラ}$$

$$\overline{\bar{\alpha}} = \alpha \quad \alpha \circ \bar{\alpha} = \overline{\alpha \circ \alpha}$$

更ニ公理8及9ヲ加ヘルト、

$$5^\circ (i) (-1) \circ \alpha = -(1 \circ \alpha)$$

$$(ii) (-\mu) \circ \alpha = -(\mu \circ \alpha)$$

$$\text{及 } 7^\circ \lambda \circ \alpha \ominus \mu \circ \alpha = \lambda \circ \alpha - \mu \circ \alpha \text{ヲウル}$$

Lemma 1 (i) (公理(1) - (9)マデカラ)

P ヲ任意ノ rational number トスルバ、

$$p \circ \alpha = p \cdot (1 \circ \alpha) = p \cdot \bar{\alpha}$$

Lemma 1 (ii) (公理(1) - (10))

α ヲ任意ノ real number トスルバ

$$\alpha \circ \alpha = \alpha \cdot \bar{\alpha}$$

証明ハ (i) $p=0$ ノ時ハ性質1^oカラ $p = \text{integers} > 0$ ノ時ハ公理7及ビ(9)ヲ用ヒテ $p = \frac{m}{n} > 0$ ノ時ハ $p = \text{integers}$ ノ時ノ結果ヲ使上、(ii)ハ矛盾法ヲ用ヒ(10)ノ條件ト矛盾ニ至ケバヨイ。

$\alpha < 0$ ノ時ハ $\alpha = -\beta$ トオク。

Corollary 1 (公理(1) - (10))

$$\lambda \cdot (\bar{\alpha} \oplus \bar{\beta}) = \lambda \cdot \bar{\alpha} \oplus \lambda \cdot \bar{\beta}$$

$$\text{又 } \lambda \cdot (\alpha \circ \alpha \oplus \beta \circ \beta) = (\lambda \alpha) \circ \alpha \oplus (\lambda \beta) \circ \beta$$

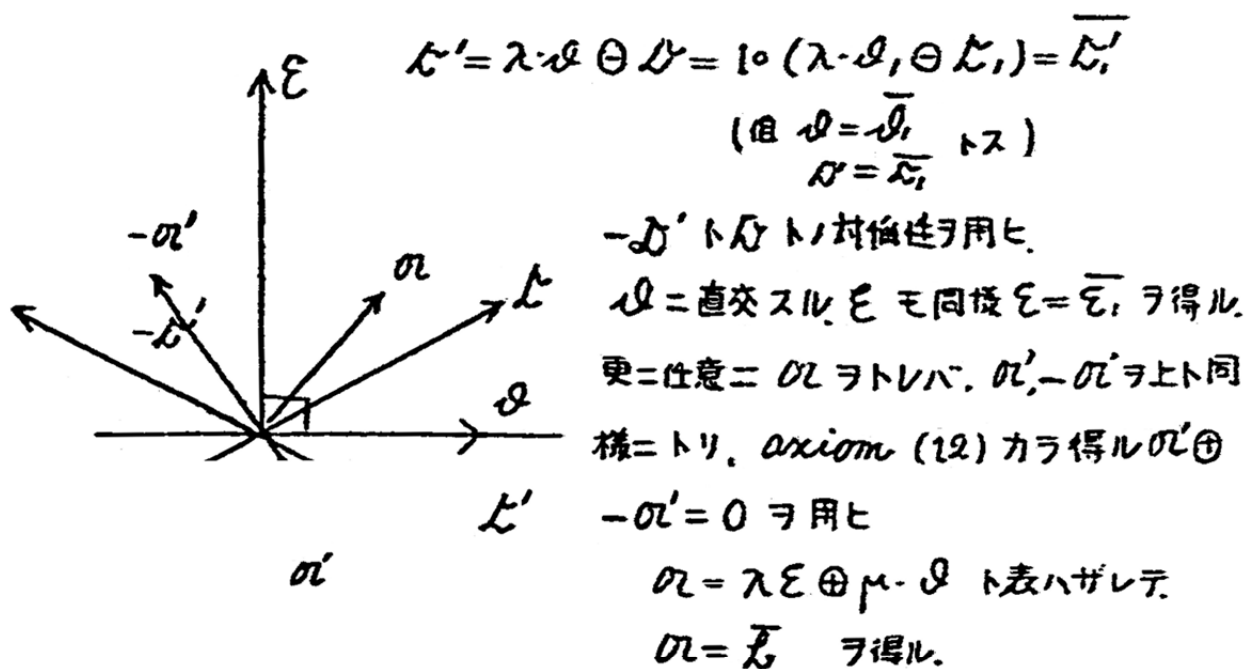
Corollary 2 (公理(1) - (10))

$$(\lambda + \mu) \cdot \bar{\alpha} = \lambda \cdot \bar{\alpha} + \mu \cdot \bar{\alpha}$$

Lemma 2 (公理(1) - (12)全部) (以下特ニ断ラヌ限リ公理全部ヲ仮定ス)

$$\forall \alpha, \exists \beta \quad \alpha \circ \beta = \bar{\alpha}$$

証 (11)ノ断言ハ vector ノーツヲ α トシ他ヲ β トシ $\alpha \circ \beta = \bar{\alpha}$ ト対向ハ vector ヲ α' デ表ハセバ



Corollary 3. $1 \odot \sigma = \sigma$

Corollary 4. $\lambda \odot \sigma = \lambda \cdot \sigma$

Corollary 5. $\ominus \sigma = -\sigma$

(2ハ axiom (12)ノ直捷ノ結果デアルガ (12)ヲ仮定シナクテモ Lemma 2, 系3ノドレカガ成立スレバ 之ト性質 2°トカラ得ラレル.

Lemma 3.

任意ノ σ ハ任意ノ直交セルニ對シ Vektorノ linear Combination デ表ハラレ. ソノ分解ハ Unique デアル.

(Lemma 2ノ証明中ノ分解ハ $\sigma = \overline{\sigma}$, $\varepsilon = \overline{\varepsilon}$ ナル σ ト ε トニ關シテ デアリ Lemma 2 乃至 系3ノ成立後始メテ Lemma 3ガ云ヘル.)

証明ハ Lemma 2ノ証明法ト同様ニヤレバ良イ.

Uniqueness ハ 0ノ分解ガ系5カラ Uniqueナル事ヲ得テ解ル.

他以下 $\lambda \odot \sigma = \lambda \cdot \sigma$ ヲ置ニ $\lambda \sigma$ トカク事ニスル.

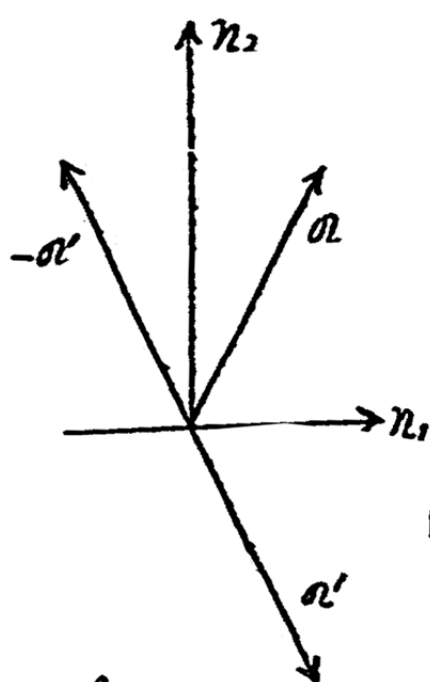
Lemma 4.

合成 $\oplus$ ハ任意ノ軸ニ關スル鏡像変換ニ對シテ不変. 従ツテ合同変換ニ對シテ 不変.

証.

1 σ ト σ' ガ π_1 ニ關シ對稱ナラバ.

$\sigma = a_{11} \pi_1 \oplus a_{12} \pi_2$ トスレバ



$$n' = a_{11} n_1 \oplus -a_{12} n_2 \text{ トナル事ガ (B)}$$

ヲ用ヒ、又之ノ分解ノ対稱ニ対スル充分性ハ

Lemma 3ノ Uniqueness カラ解ル、

2° 鏡像変換ノ軸トソレニ直交スル軸ヲトリ 1°ノ分解

ヲ適用スレバ Lemmaノ証明ハ容易ニ出来ル、

Corollary 6.

合成 $\oplus$ ハ相似変換ニ対シテ不変

Bew Lemma 4 及 Corollary 4 Corollary 1

カラ明カ。

Lemma 5

$$n \perp l \text{ ナラバ } |n|^2 + |l|^2 = |n \oplus l|^2$$

$$\text{Bew } n \oplus l = k$$

$$n = l_1 \oplus d_1$$

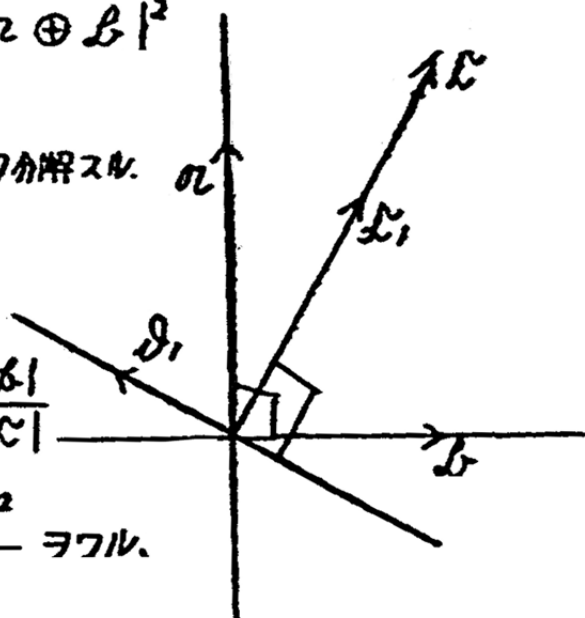
$$l = k_2 \oplus d_2$$

ト因ノ如ク分解スル、

Corollary 6 カラ

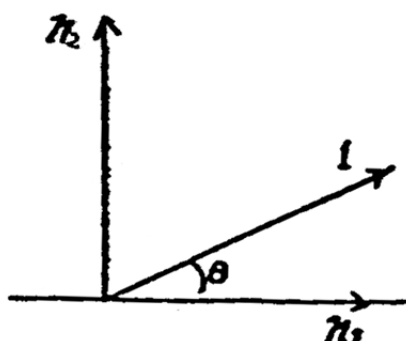
$$\frac{|k_1|}{|n|} = \frac{|n|}{|k|} \quad \frac{|k_2|}{|l|} = \frac{|l|}{|k|}$$

$$|k| = |k_1 + k_2| = \frac{|n|^2 + |l|^2}{|k|} \text{ ヲフル、}$$



Lemma 6

$|n|=1$, n_1, n_2 ヲ任意ノ直交単位 Vektor トシテ n ト n_1 トノ交角ヲ θ トスレバ



$$n = \cos \theta n_1 \oplus \sin \theta n_2$$

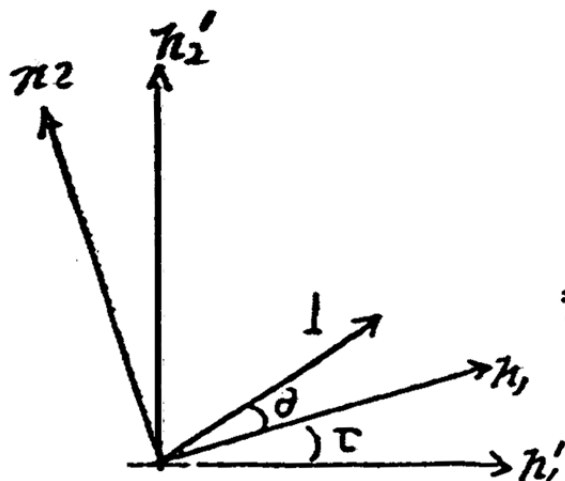
Bew Corollary 6 カラ

$$n = \varphi(\theta) n_1 \oplus \varphi\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) n_2$$

且 Lemma 5 カラ

$$\varphi^2(\theta) + \varphi^2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = 1$$

次ニ n_1, n_2 ヲ $\mathbb{C}$ ダケ廻轉 n'_1, n'_2 トシ、



n_1, n_2' = 対スル分解ノ式カラ、

$$\varphi(\theta + \tau) = \varphi(\theta) \varphi(\tau) - \varphi(\frac{\pi}{2} - \theta)$$

$$\varphi(\frac{\pi}{2} - \tau)$$

ヲ得、又 $\varphi(0) = 1$ ヲウル。

加法 定理ノ Special Case トシテキ角、公式ガ得ラレルガ、

Axiom (12). $\lambda \geq 0$ カラ $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ テ $\varphi(\theta) \geq 0$ テ 半角ノ $\pm \text{sign}$

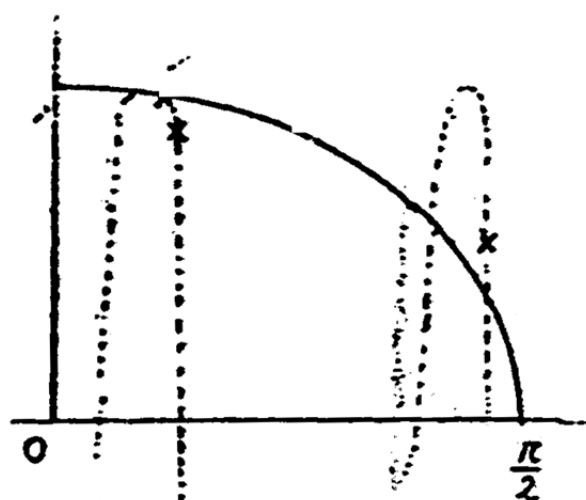
ヲトル。 $\frac{\pi}{2}$ ノ $\frac{m}{2^n}$ 倍ノ角ニ對シテハ

$$\varphi(\theta) = \cos \theta \text{ ヲ得テ } \text{ind} \times \frac{\pi}{2} \text{ ノ}$$

角ニ對シテハ矛盾法ヲ用ヒ $\lambda \geq 0$ トノ
矛盾ニ導ク。

以上述ベテ來タ事柄カラ主定理ハ明デ

アル。



Theorem $\oplus$ ハ平行四辺形則ヲミタス。

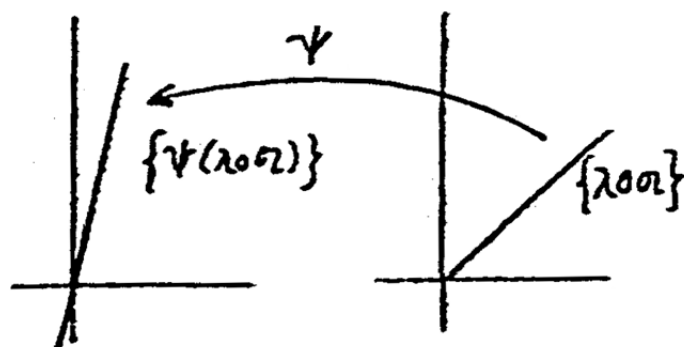
(a) (1) カラ (11) ヲミタシ (12) ヲミタサズ、平行四辺形則ヲミタサヌ反例

(寺阪先生ニヨル)

$(E^2, +)$ Space ノ直線上ノ位置ハソノマ、直線相互ノ角ヲ変更スル。但
シ1対1ノ写像ヲ ψ トシ

$$\begin{cases} \alpha \oplus \beta = \psi(\psi^{-1}(\alpha) + \psi^{-1}(\beta)) \\ \lambda \odot \alpha = \lambda \cdot \alpha \end{cases}$$

デ定義スル。

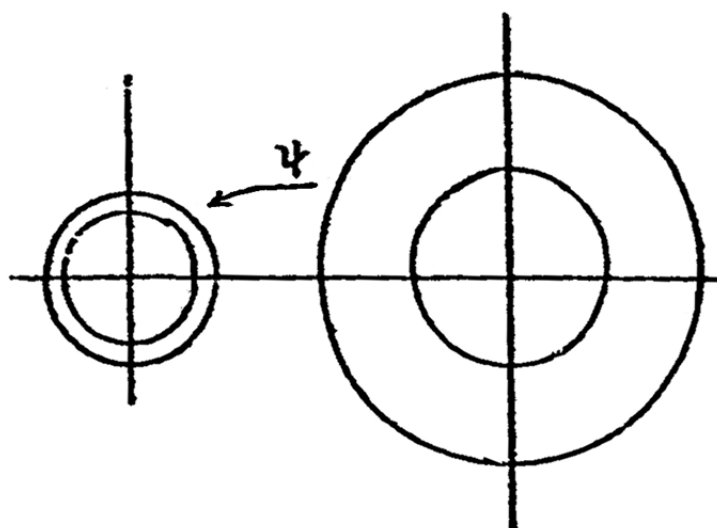


例2 (1)-(8) 及 (10)(11)

(12) ヲミタシ (9) ヲミタ

サズ平行四辺形則ヲミタ

サヌ例。



射線間ノ角ハ不変放射狀對稱十
1 射 1 ノ勝手ナ對應ヲ作ル。コ
ノ寫像ヲ ψ トシ、

$$\begin{cases} \sigma \oplus \delta = \psi(\psi^{-1}(\sigma) + \psi^{-1}(\delta)) \\ \lambda \sigma = \psi(\lambda \cdot \psi^{-1}(\sigma)) \end{cases}$$

デ定義スル。

例3 (11) ノミ ミタサズ 平行四辺形則ヲミタサ又反例。

寫像ハ例2ノ寫像ヲ用ヒ、

$$\begin{cases} \sigma \oplus \delta = \psi(\psi^{-1}(\sigma) + \psi^{-1}(\delta)) \\ \lambda \sigma \equiv 0 \end{cases}$$

デ定義スル。

例3 (12) ノミ ミタサズ 平行四辺形則ヲミタサ又反例。寫像ハ例2ノ寫像ヲ
用ヒ、

$$\begin{cases} \sigma \oplus \delta = \psi(\psi(\psi^{-1}(\sigma) + \psi^{-1}(\delta))) \\ \lambda \sigma \equiv 0 \end{cases}$$

デ定義スル。

次ニ (I)-(10) マデヲ仮定ノ上デ (11) 及ヒ (12) ト同等ナ *axiom* ヲ考ヘ
テ見ル。 (本マノ *axiom* ヲ [I] トスル)

[II]

$$\begin{cases} (11)' & \sigma \oplus \sigma = \sigma + \sigma \\ (12)' & (12)ノ直角ノ場合ヲノゾキ、 \\ & \exists \lambda > 0 : \sigma \oplus \sigma' = \lambda \sigma \end{cases}$$

[III]

$$\begin{cases} (11)' & \forall \sigma \exists \delta \sigma = \overline{\delta} \\ (12)' & \sigma \oplus \sigma' = \lambda \sigma \end{cases} \quad \begin{cases} (11)' & \forall \sigma, \exists \delta, \sigma = \overline{\delta} \\ (12)' & \sigma \oplus \sigma' = \lambda \cdot \delta \end{cases}$$

[IV]

$$\begin{cases} (11)' & 1 \circ \sigma' = \sigma \\ (12)' & \sigma \oplus \sigma' = \lambda \cdot \delta \end{cases} \quad \begin{cases} (11)' & 1 \circ \sigma = \sigma \\ (12)' & \sigma \oplus \sigma' = \lambda \circ \delta \end{cases}$$

Equivalent ノ証明ハ簡單ダガ [II] = 関シテハ、

(12)' から $\alpha \oplus \alpha = \lambda \circ \alpha$ と (11)' 卜て $\alpha = \alpha \circ \alpha$

lemma 2 がミタサレタワケデアル.

未詳ノ事柄ハ

$$\begin{cases} (11)' & \alpha \oplus \alpha = \alpha + \alpha \\ (12)' & \exists \lambda > 0 \quad \alpha \oplus \alpha' = \lambda \cdot \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} (11)' = (11) \\ (12)' \exists \lambda \geq 0 \quad \alpha \oplus \alpha' = \lambda \circ \alpha \end{cases}$$

及 $\begin{cases} (11)' = (11) \\ (12)' (12), \quad \lambda \geq 0 \text{ノ制限及 } \alpha \text{ノ向ニ開スル制限ヲトル} \end{cases}$

ソノ代リニ (13)' $\alpha \oplus (\alpha) = 0$ ヲ加ヘル.