



Title	ポテンシャル論ニ関スル Müntzノ定理
Author(s)	下田, 節郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1949, 2(13), p. 424-441
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75266
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

132. ポテンシャル論ニ関スル Muntz ノ定理

(阪大) 下 田 節 郎 (1948.11.30)

“函数方程式”第五・六号(昭和14年)ニ 福原先生ガ, *Müntz* ノ定理ノ證明ニツイテ述ベラレテ居リマスガ, 之ニハ *A. Korn* ノ流儀ノ證明モ可能デスカラ コノニ紹介致シマス.

此方法ナラバ 2次元ハモトヨリ 一般ニ $n \geq 2$ ナル n 次元ニ於テモ全ク同一形式デ証明出来マスカラ, 以下此様ナ一般ナ一般次元ニ於ケル定理ヲ取扱フ事ニシマス.

n ハ常ニ ≥ 2 ナル次元数ヲ示ス事ニシマス.

§1. 記法・記号ノ説明.

n 次元ユークリッド空間ノ点ヲ次ノ如クーツノ文字デ表ス事ニシマス.

$$x = (x_1, \dots, x_n)$$

x_i ハ点 x ノ i 番目ノ座標成分デス.

$$\frac{\partial^m}{\partial E_1 \partial E_2 \cdots \partial E_m} u(x)$$

ノ如キ記号ガ用ヒラレマス。

フツウニ知ラレテ居ル

$$u(x) \in C^{(m)}(G) \quad G \text{ ハ領域}$$

ト言フ事ハ、如何ニ仕意ニ m 個ノ單位 vector $E_1, \dots, E_m$ ヲ定メテモ (各点
デ'次ノ微分ガ可能デ')

$$\frac{\partial^m}{\partial E_1 \partial E_2 \cdots \partial E_m} u(x) \in C(G)$$

デアル。トイフ事ト一致シマス。

猶

$$D_m u(x)$$

ナル記号ハ、微分方向 $E_1, \dots, E_m$ ヲ明示スル必要ノナイトキニ 當然ト m 階
ノ微分 導函数ヲ示ストキニ利用シマス。

n 次元ニ於ケル Laplace ノ方程式 $\Delta u = 0$ ニ対スル elementary
solution ヲ次ノ様ナ記号デ示シマス。

$$v(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{(n-2)|x-\xi|^{n-2}} & (n \geq 3 \text{ ノトキニ}) \\ \log \frac{1}{|x-\xi|} & (n=2 \text{ ノトキニ}) \end{cases}$$

即チ x, ξ ハ何レモ n 次元空間ノ点デアツテ 右辺ハ此函数ノ内容ヲ書イタモノ
デス。

此様ニ書クトハ函数ハ次元ニ對シテ統一サレタ形式ニ表ハサレテ居マセンガ
之ヲ又ニツイテ 又ハ ξ ニツイテ微分シタモノハ統一サレタ形式デ表サレマス。

即チ x ニツイテノ微分ヲ書イテ見マスト、

$$\frac{\partial}{\partial E} v(x, \xi) = -\frac{\cos(E, x-\xi)}{|x-\xi|^{n-1}}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial E_1 \partial E_2} v(x, \xi) = \frac{n \cos(E_1, x-\xi) \cos(E_2, x-\xi) - \cos(E_1, E_2)}{|x-\xi|^n}$$

$$\frac{\partial^3}{\partial E_1 \partial E_2 \partial E_3} v(x, \xi) = -\frac{n(n+2) \cos(E_1, x-\xi) \cos(E_2, x-\xi) \cos(E_3, x-\xi)}{|x-\xi|^{n+1}}$$

§1. 記法・記号・説明

n 次元ユークリッド空間ノ點ヲ次ノ如クーツノ文字デ表ス事ニシマス.

$$x = (x_1, \dots, x_n)$$

x_i ハ點 x ノ i 番目ノ座標成分デス.

此空間ヲ *Vektorraum* ノ様ニモ考ヘテ 次ノ様ナ著キ方ヲモ利用シマス:

$$x = (x_1, \dots, x_n) \quad y = (y_1, \dots, y_n)$$

ニ對シ

$$x - y = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots, x_n - y_n)$$

二點 x, y 間ノユークリッド距離ヲ次ノ様ナ記号デ示シマス:

$$(x - y) = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

函数 $u(x)$ ニ對スル *Laplacian* ノ意味ハ勿論次ノ通りデス:

$$\Delta u(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u(x)$$

n 次元ノ領域 G ニ於テ定義サレテ $u(x) \in C''(G)$ 且ツ $\Delta u(x) = 0$.

for all $x \in G$ ナル函数 $u(x)$ ヲヤハリ *harmonic* デアルト云フ事ニシマス.

偏微分ニツイテハ, 次ノ様ナ記号ヲ用ヒマス:

$$\frac{\partial}{\partial E} u(x)$$

コ、ニ E ハ或定マツタ單位 *vector* (長サ 1, *vector*) ヲ意味シ.

$$\frac{\partial}{\partial E} u(x) = \lim_{\substack{n \rightarrow 0 \\ n > 0}} \frac{u(x + nE) - u(x)}{n}$$

右辺ノ *limit* ガ存在スルトキ, ソレヲ左辺ノ記号デ表スワケデス.

之ガ x ニ於ケル E 方向デノ微分デスガ, ツイテ導函数 $\frac{\partial}{\partial E} u(x)$ ニツイテ

$$\frac{\partial}{\partial E'} \left(\frac{\partial}{\partial E} u(x) \right) = \frac{\partial^2}{\partial E' \partial E} u(x)$$

ト定義シマス. E' ハヤハリ或定マツタ單位 *vector* デ 右辺ノ記号ノ意味ガ左辺ノ様ナモノデアルワケデス.

斯クシテ順次ニ高マリ 一般ニ m 階ノ微分・導函数トシテ

$$+ \frac{n(\cos(E_1, E_2) \cos(E_3, X-\vec{z}) + \dots \dots \dots)}{|X-\vec{z}|^{n+1}}$$

等々 (最後ノ省略シテアル但ハ E_1, E_2, E_3 ヲ *cyclic* ニ著キカヘテ得
ラレバ三ツノ項ノ和ニナル筈ニ描ヘバヨイ).

$\cos(E, X-\vec{z})$ ハニツノ *vector* $E, X-\vec{z}$ (即チ $\vec{z} \rightarrow X$) ノ成ス角ノ *cosine*
ヲ $\cos(E_1, E_2)$ ハ *vector* E_1, E_2 ノナス角ノ *cosine* ヲ表シマス.

n 次元ニ於ケル積分モ、例ヘバ次ノ様ニ略記シマス:

$$\int_{G.} f(x) dx \quad \int_G \gamma(x, \vec{z}) d\vec{z}$$

因

$$\left| \frac{\partial}{\partial E} \gamma(x, \vec{z}) \right| \leq \frac{1}{|x-\vec{z}|^{n-1}}$$

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial E_1 \partial E_2} \gamma(x, \vec{z}) \right| \leq \frac{n+1}{|x-\vec{z}|^n}$$

$$\left| \frac{\partial^3}{\partial E_1 \partial E_2 \partial E_3} \gamma(x, \vec{z}) \right| \leq \frac{n^2+5n}{|x-\vec{z}|^{n+1}}$$

ナル事ヲ妥クツカヒマス.

§2. 球ニ対スル *Green* ノ函数

n 次元ニ於テ 点 x_0 ヲ中心トスル半径 $R > 0$ ノ n 次元球 (*hypersphere*)

$$K = \{x \mid |x - x_0| < R\}$$

ニ對スル *Green* ノ函数ヲ $K(x, \vec{z})$ ニテ表ス事ニシマス. 之ハ

$$K(x, \vec{z}) = \gamma(x, \vec{z}) + \nu(x, \vec{z})$$

ノ如キ形ノ函数デ 此 $\nu(x, \vec{z})$ ガ 次ノ様ナ性質ヲモツモノデアリマス.

(0) $\nu(x, \vec{z})$ ハスベテ $x \in \bar{K}, \vec{z} \in K$ ニ對シテ定義サレテ居ル.

(1) $\vec{z} \in K$ ヲ固定シタトキ x ガ球ノ境界 S 上ニアレバ

$$\nu(x, \vec{z}) = -\gamma(x, \vec{z})$$

(2) $\vec{z} \in K$ ヲ固定シタトキ, x ノ函数トシテ

$$\nu(x, \vec{z}) \in C(\bar{K}) \text{ 且ツ } \in C''(K)$$

(3) $\vec{z} \in K$ ヲ固定シタトキ x ノ函数トシテ K ニ於テ $\Delta u = 0$ ノ解デ

アル (即ち *harmonic* テアル)

之ハ *Green* ノ函数ノ定義其儘デスガ、球ノ場合ニハ具体的ナ *expression* ガ知ラレテ居テ、且ツ $K(x, \bar{z})$ ハ $x, \bar{z}$ ニ對シテ對稱ニナリマスカラ、 $U(x, \bar{z})$ ハスベテノ $x \in K, \bar{z} \in \bar{K}$ ニ對シテ定ギサレテアルト考ヘテモヨイ事ニナリマス。

蛇足ナラ、其 *expression* トイフノハ次ノ如キモノデアリマス。一般ニ $x \neq x_0$ ナル点 x ニ對シ、ソレノ球 K ニ關スル鏡像点ヲ x^σ ニテ表ス事ニシマス。

$$x^\sigma - x_0 = \frac{R^2}{|x - x_0|^2} (x - x_0)$$

之ヲ用ヒテ

$$U(x, \bar{z}) = \begin{cases} -\left(\frac{R}{|x - x_0|}\right)^{n-2} \gamma(x, \bar{z}) & (n \geq 3 \text{ ノトキ}) \\ -\left(\log \frac{R}{|x - x_0|} + \gamma(x, \bar{z})\right) & (n = 2 \text{ ノトキ}) \end{cases}$$

$\gamma(x, \bar{z})$ ノ式ヲ代入シテ書直スト。

$$U(x, \bar{z}) = \begin{cases} -\frac{1}{n-2} \left(\frac{R}{|x - x_0| \cdot |x^\sigma - \bar{z}|}\right)^{n-2} & (n \geq 3) \\ -\log \frac{R}{|x - x_0| \cdot |x^\sigma - \bar{z}|} & (n = 2) \end{cases}$$

コレヲノ *expression* ハ $x = x_0$ ノトキニハ都合ガワルイ。

$x, \bar{z}$ ガ共ニ x_0 ト異ルトキハ、 $\Delta x_0 \bar{z} x^\sigma \propto \Delta x_0 x \bar{z}^\sigma$ ナル事カラ、

$$|x - x_0| \cdot |x^\sigma - \bar{z}| = |\bar{z} - x_0| \cdot |x - \bar{z}^\sigma|$$

カラ、

$$|x - x_0| \cdot |x^\sigma - \bar{z}| = |\bar{z} - x_0| \cdot |x - \bar{z}^\sigma|$$

ヲ得マスカラ、 $U(x, \bar{z})$ ハ次ノ様ニモ書カレマス。 $\gamma(x, \bar{z})$ ヲ利用シテ

$$U(x, \bar{z}) = \begin{cases} -\left(\frac{R}{|\bar{z} - x_0|}\right)^{n-2} \gamma(x, \bar{z}^\sigma) & (n \geq 3) \\ -\left(\log \frac{R}{|\bar{z} - x_0|} + \gamma(x, \bar{z}^\sigma)\right) & (n = 2) \end{cases}$$

此 *expression* ハ $\bar{z} = x_0$ ノトキニハ都合ガワルイデスガ $\bar{z} = x_0$ ノトキハ

$$U(x, x_0) = \begin{cases} -\frac{1}{n-2} \frac{1}{R^{n-2}} & (n \geq 3) \\ -\log \frac{1}{R} & (n=2) \end{cases}$$

トナル事が第二 expression から得ラレマス。コレヲハ x ニ関係シナイ常数デアリマス。

第三 expression ハ $U(x, \xi)$ ノ x ニ関スル微分ヲ書クトキニ都合ガ宜シイ。即チ

$$\frac{\partial}{\partial E} U(x, \xi) = -\left(\frac{R}{|\xi - x_0|}\right)^{n-2} \frac{\partial}{\partial E} \gamma(x, \xi^\sigma)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial E_1 \partial E_2} U(x, \xi) = -\left(\frac{R}{|\xi - x_0|}\right)^{n-2} \frac{\partial^2}{\partial E_1 \partial E_2} \gamma(x, \xi^\sigma)$$

專々 從ツテ $\xi \neq x_0$ ナル限り

$$\left| \frac{\partial}{\partial E} U(x, \xi) \right| \leq \left(\frac{R}{|\xi - x_0|}\right)^{n-2} \frac{1}{|x - \xi^\sigma|^{n-1}}$$

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial E_1 \partial E_2} U(x, \xi) \right| \leq \left(\frac{R}{|\xi - x_0|}\right)^{n-2} \frac{n+1}{|x - \xi^\sigma|^n}$$

$$\left| \frac{\partial^3}{\partial E_1 \partial E_2 \partial E_3} U(x, \xi) \right| \leq \left(\frac{R}{|\xi - x_0|}\right)^{n-2} \frac{n^2 + 5n}{|x - \xi^\sigma|^{n+1}}$$

勿論 $\xi = x_0$ ナラバ、コレノ derivative ノ値ハ零デアリマス。

一般ニ $\xi \in K$ ヲ固定スルバ、 $U(x, \xi)$ ハ x ノ函数トシテ K ニ於テ harmonic デスカラ、 K 内デ x ニツイテ何回デモ微分可能デ x ニツイテ m 回 微分シタ事ヲ D_m ニ表セバ、 (x, ξ) ノ函数トシテ

$$\left. \begin{array}{l} U(x, \xi) \\ D_m U(x, \xi) \end{array} \right\} \in C(\bar{K} \times K)$$

トナリ、又 G ヲ $G=K$ ナル可測集合 $f(\xi)$ ヲ G ニ於テ定ギサレタ有界可測ノ函数トスルトキ $x \in K$ ニ對シ

$$\int_G U(x, \xi) f(\xi) d\xi, \quad \int_G D_m U(x, \xi) f(\xi) d\xi$$

ノ如キ積分ガ可能デ $x \in K$ ノトキ。

$$D_m \int_G v(x, \xi) f(\xi) d\xi = \int_G D_m v(x, \xi) f(\xi) d\xi$$

トナル事モヨク知ラレテ居リマス。即チ

$$w(x) = \int_G v(x, \xi) f(\xi) d\xi \in C^{(\infty)}(K)$$

デアリマス。

此 x ニツキ微分シタ導函数 $D_m v(x, \xi)$ ハ $x \in K$ ヲ固定シタトキ、 ξ ノ函数トシテ G ニ於テ何和トナル事モ直チニカル事ガアリマス。

一般ノ n 次元ノ場合デモ

$$U(x) = \int_K k(x, \xi) d\xi = \frac{\omega_n}{2n} \{ R^2 - |x - x_0|^2 \}$$

ガ $\bar{K}$ デ連続 K 内デニ回連続微分可能デ $\Delta U = -\omega_n$ 且ツ K ノ境界デ $= 0$

トナル Poisson 方程式ノ解ナル事ハ 割合難作ナク確メラレマス。 ω_n ハ 常ニ n 次元ノ単位球 (半径 $= 1$ ナル球) ノ表面積ヲ表ス恒数トシマス。

猶、 $x \in \bar{K}$ ノトキ

$$\int_K \gamma(x, \xi) d\xi = \frac{\omega_n}{n} \left\{ R^n \varphi(R) + \frac{R^2 - |x - x_0|^2}{2} \right\}$$

從ツテ

$$\int_K v(x, \xi) d\xi = \int_K k(x, \xi) d\xi - \int_K \gamma(x, \xi) d\xi \equiv \frac{\omega_n R^n \varphi(R)}{n}$$

之ハ常数デアリマス。但シ $\varphi(r)$ ハ $\varphi(|x - \xi|) = \gamma(x, \xi)$ デアル長ナ函数トシマス。

コレカラ $x \in K$ ノトキ

$$\frac{\partial}{\partial E} \int_K k(x, \xi) d\xi = \frac{\partial}{\partial E} \int_K \gamma(x, \xi) d\xi = - \frac{\omega_n |x - x_0| \cos(E, x - x_0)}{n}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial E_1 \partial E_2} \int_K k(x, \xi) d\xi = \frac{\partial^2}{\partial E_1 \partial E_2} \int_K \gamma(x, \xi) d\xi \equiv - \frac{\omega_n \cos(E_1, E_2)}{n}$$

ナル事ガ分リマス。ニ回微分シタチハ constant デアリマス。

§3 問題トスル定理

ソレハ次ノ如キモノデアリマス。

指数 α ($0 < \alpha < 1$)ニ關シテ $f(\xi)$ ガ K ニ於テ Hölderienne ナラバ、

$$u(x) = -\frac{1}{\omega_n} \int_K K(x, \xi) f(\xi) d\xi$$

ニツキ、

$$(1) \|u\| \leq \frac{R^2}{2n} \|f\| \quad (2) \|D_1 u\| \leq 2R \|f\|,$$

$$(3) \|D_2 u\| \leq \frac{2(n+1)}{\alpha} R^\alpha H_\alpha(f) + \frac{\|f\|}{n},$$

(4) $D_2 u$ ハ f ト同一指数 α ニ關シテ、 K ニ於テ Hölderienne デアツテ、 $D_2 u, f$ ノ α -Hölder-constants ノ間ニハ 次ノ如キ不等式ガ成立ツ。

$$H_\alpha(D_2 u) \leq M_{\alpha, n} H_\alpha(f)$$

コニ $M_{\alpha, n}$ ハ α 及ビ n ノミニ關係シテ定メラレル 常数デアツテ、

例ヘバ

$$M_{\alpha, n} = \frac{2^{\alpha+1}}{2^\alpha - 1} \left\{ \frac{4(n+1)}{\alpha} + 2(n^2 + 5n) \left(\frac{2^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \frac{2}{1+\alpha} \right) + \frac{1}{n} + \left(1 + \frac{1}{n}\right) 2^n \right\}$$

ト取ル事ガ出來ル、但シ 例ヘバ f ニツイテ言フト $\|f\|, H_\alpha(f)$ ノ意味ハ

$$\|f\| = O \theta \cdot g_n \cdot |f(x)|$$

$H_\alpha(f)$ = 指数 α ニ關スル f ノ Hölder-constant ヲ表スモ

ノトスル。

猶、 $f(\xi)$ ガ K ニ於テ Hölderienne ナラバ $u(x)$ ハ K 内デニ階微分可能デ。

$$\frac{\partial^2}{\partial E_1 \partial E_2} u(x) = -\frac{1}{\omega_n} \left\{ \int_K \{f(\xi) - f(x)\} \frac{\partial^2}{\partial E_1 \partial E_2} K(x, \xi) d\xi + f(x) \frac{\partial^2}{\partial E_1 \partial E_2} \int_K K(x, \xi) d\xi \right\}$$

トナル事ハ分ツテ居ルモノトシマス。

証明ノウチ (1)ニ對スルモノハ易シイ。

即チ $K(x, \xi) \geq 0$ ヲ利用シテ。

$$|u(x)| \leq \frac{\|f\|}{\omega_n} \int_K K(x, \xi) d\xi = \frac{\|f\|}{a_n} \cdot \frac{\omega_n}{2n} \{R^2 - |x - x_0|^2\} \\ \leq \frac{\|f\| R^2}{2n}$$

(2), (3) の証明 = ハ次の Lemma を用ヒル事が有効デアル。

Lemma 1: $x \in \bar{K}$, $\xi \in K$, $\xi \neq x_0$ ナルトキ $\alpha \geq -2$ ナラバ、

$$\left(\frac{R}{|\xi - x_0|}\right)^{n-2} \frac{1}{|x - \xi^\sigma|^{n+\alpha}} \leq \frac{1}{|x - \xi|^{n+\alpha}}$$

之ハ $\triangle x_0 x \xi$ = 於ケル初等キ力学的ナ考察カラ、

$$|x - \xi^\sigma| \geq |x - \xi| \frac{R}{|\xi - x_0|}$$

ヲ得ルカラ $\alpha + 2 \geq 0$ 及ビ $n + \alpha \geq 0$ ナル事 = 注目シテ、

$$\left(\frac{R}{|\xi - x_0|}\right)^{n-2} \frac{1}{|x - \xi^\sigma|^{n+2}} \leq \left(\frac{R}{|\xi - x_0|}\right)^{n-2} \frac{1}{|x - \xi|^{n+\alpha}} \left(\frac{|\xi - x_0|}{R}\right)^{n+\alpha} \\ = \left(\frac{|\xi - x_0|}{R}\right)^{\alpha+2} \frac{1}{|x - \xi|^{n+\alpha}} \leq \frac{1}{|x - \xi|^{n+\alpha}}$$

デ正シイ事が分ル。

$$(2) \text{ の証明. } D_i u(x) = - \frac{1}{\omega_n} \int_K D_i K(x, \xi) f(\xi) d\xi$$

$$= - \frac{1}{\omega_n} \left\{ \int_K D_i V(x, \xi) f(\xi) d\xi + \int_K D_i U(x, \xi) f(\xi) d\xi \right\}$$

デアルカラ

$$|D_i u(x)| \leq \frac{\|f\|}{\omega_n} \left\{ \int_K |D_i V(x, \xi)| d\xi + \int_K |D_i U(x, \xi)| d\xi \right\} \\ \leq \frac{\|f\|}{\omega_n} \left\{ \int_K \frac{d\xi}{|x - \xi|^{n-1}} + \int_K \left(\frac{R}{|\xi - x_0|}\right)^{n-2} \frac{d\xi}{|x - \xi^\sigma|^{n-1}} \right\} \\ \leq \frac{\|f\|}{\omega_n} \left\{ \int_K \frac{d\xi}{|x - \xi|^{n-1}} + \int_K \frac{d\xi}{|x - \xi|^{n-1}} \right\} \leq \frac{2\|f\|}{\omega_n} \int_K \frac{d\xi}{|x_0 - \xi|^{n-1}} \\ = \frac{2\|f\|}{\omega_n} \cdot \omega_n \int_0^R \alpha \rho = 2\|f\| R$$

(3)ノ証明: 既ニ場ゲタ式カラ

$$\begin{aligned}
 |D_2 u(x)| &\leq \frac{1}{\omega_n} \left\{ \int_K |f(\xi) - f(x)| \cdot |D_2 v(x, \xi)| d\xi + \right. \\
 &\quad \left. + \int_K |f(\xi) - f(x)| \cdot |D_2 v(x, \xi)| d\xi + \frac{\omega_n \|f\|}{n} \right\} \\
 &\leq \frac{(n+1)H_\alpha(f)}{\omega_n} \left\{ \int_K \frac{d\xi}{|x-\xi|^{n-\alpha}} + \int_K \left(\frac{R}{|\xi-x_0|} \right)^{n-2} \frac{|x-\xi|^\alpha}{|x-\xi|^n} d\xi \right\} + \frac{\|f\|}{n} \\
 &\leq \frac{(n+1)H_\alpha(f)}{\omega_n} \cdot 2 \int_K \frac{d\xi}{|x-\xi|^{n-\alpha}} + \frac{\|f\|}{n} \\
 &\leq \frac{2(n+1)H_\alpha(f)}{\omega_n} \int_K \frac{d\xi}{|x_0-\xi|^{n-\alpha}} + \frac{\|f\|}{n} \\
 &= \frac{2(n+1)H_\alpha(f)}{\omega_n} \cdot \omega_n \int_0^R \rho^{\alpha-1} d\rho + \frac{\|f\|}{n} \\
 &= \frac{2(n+1)H_\alpha(f)}{\alpha} R^\alpha + \frac{\|f\|}{n}
 \end{aligned}$$

§4. (4)ノ証明

定理ノウチ一箇所心ナ(4)ノ部分ノ証明ヲ以下順次ニ展開シマス, E, E' ハキ
 $\times$ テオイテ $\frac{\partial^2}{\partial E \partial E'}$ ヲ單ニ D_2 ニテ示ス事ニシマス.

前ニ場ゲタ $D_2 u(x)$ ノ式ヲ用ヒテ, $p, q \in K$ ノトキ

$$\begin{aligned}
 |D_2 u(p) - D_2 u(q)| &\leq \frac{1}{\omega_n} \left\{ \left| \left[\int_K \{f(\xi) - f(x)\} D_2 K(x, \xi) d\xi \right]_{x=q}^{x=p} \right| + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{|f(p) - f(q)| \omega_n}{n} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{\omega_n} \left| \left[\quad \right]_{x=q}^{x=p} \right| + \frac{H_\alpha(f)}{n} |p - q|^\alpha$$

即チ問題ハ

$$\left| \left[\quad \right]_{x=q}^{x=p} \right| \text{ノ評価ニアル.}$$

ソレハ結局 $p \neq q$ トシテ.

$$\left| \left[\quad \right]_{x=q}^{x=p} \right| \leq \text{何カ } \times |p - q|^\alpha$$

ノ如キ評價ヲ出シテ見レバヨイワケデアル。

$p \neq q$ トシテ p, q ノ中点ヲ X , X ヲ中心トスル半径 $|p-q|$ ノ球ヲ K' トスル。

$x \in K'$ ノトキ、積分相成ヲニツニ分ケテ

$$\int_K \{f(\xi) - f(x)\} D_2 K(x, \xi) d\xi = \int_{K \cap K'} \{f(\xi) - f(x)\} D_2 K(x, \xi) d\xi + \\ + \int_{K-K'} \{f(\xi) - f(p)\} D_2 K(x, \xi) d\xi + \{f(p) - f(x)\} \int_{K-K'} D_2 K(x, \xi) d\xi$$

ト書カレル。故ニ

$$\left[\int_K \{f(\xi) - f(x)\} D_2 K(x, \xi) d\xi \right]_{x=q}^{x=p} \\ = \left[\int_{K \cap K'} \{f(\xi) - f(x)\} D_2 K(x, \xi) d\xi \right]_{x=q}^{x=p} + \left[\int_{K \cap K'} \{f(\xi) - f(x)\} D_2 K(x, \xi) d\xi \right]_{x=q}^{x=p} + \\ + \left[\int_{K-K'} \{f(\xi) - f(p)\} D_2 K(x, \xi) d\xi \right]_{x=q}^{x=p} + \left[\int_{K-K'} \{f(\xi) - f(p)\} D_2 K(x, \xi) d\xi \right]_{x=q}^{x=p} + \\ + \{f(q) - f(p)\} \int_{K-K'} D_2 K(q, \xi) d\xi$$

此右辺ノ四ツノ $\left[\int_{x=q}^{x=p} \right]$ ヲ順次 $[1], [1'], [2], [2']$ ニテ表シ 最後ノ項ヲ $[3]$ トスル。

先ツ

$$\left| \int_{K \cap K'} \{f(\xi) - f(x)\} D_2 K(x, \xi) d\xi \right| \leq (n+1) H_\alpha(f) \int_{K'} \frac{d\xi}{|x-\xi|^{n-\alpha}} \\ = (n+1) H_\alpha(f) \int_{K'} \frac{d\xi}{|x-\xi|^{n-\alpha}} = \omega_n (n+1) H_\alpha(f) \int_0^{|p-q|} \int \alpha^{-1} d\rho \\ = \frac{\omega_n (n+1) H_\alpha(f)}{\alpha} |p-q|^\alpha$$

及

$$\left| \int_{K \cap K'} \{f(\xi) - f(x)\} D_2 v(x, \xi) d\xi \right| \leq (n+1) H_\alpha(f) \int_{K \cap K'} \left(\frac{R}{|\xi - x_0|} \right)^{n-2} \frac{|x - \xi|^\alpha}{|x - \xi|^{n-2}} d\xi$$

$$\leq (n+1) H_\alpha(f) \int \frac{d\xi}{|x - \xi|^{n-\alpha}} \leq \frac{\omega_n (n+1) H_\alpha(f)}{\alpha} |p - q|^\alpha$$

＝ヨリ

$$\left\{ \begin{array}{l} |[1]| \\ |[1]| \end{array} \right\} \leq \frac{2\omega_n (n+1) H_\alpha(f)}{\alpha} |p - q|^\alpha$$

次 $x \in K'$ ノトキハ

$$D_m \int_{K \cap K'} \{f(\xi) - f(p)\} \gamma(x, \xi) d\xi = \int_{K \cap K'} \{f(\xi) - f(p)\} D_m \gamma(x, \xi) d\xi$$

デアノコトニ注意シテ $\vec{p\xi}$ 方向ノ単位 vector ヲ E ニテ表セバ、

$$\begin{aligned} |[2]| &= \left| \int_0^{|p-q|} \frac{\partial}{\partial E} \int_{K \cap K'} \{f(\xi) - f(p)\} D_2 \gamma(p + SE, \xi) d\xi dS \right| \\ &\leq \int_0^{|p-q|} \int_{K \cap K'} |f(\xi) - f(p)| |D_2 \gamma(p + SE, \xi)| d\xi dS \\ &\leq \int_0^{|p-q|} \int_{K \cap K'} \left\{ |f(\xi) - f(p + SE)| + |f(p + SE) - f(p)| \right\} \frac{n^2 + 5n}{|p + SE - \xi|^{n+1}} d\xi dS \\ &\leq (n^2 + 5n) H_\alpha(f) \int_0^{|p-q|} \int_{K \cap K'} \frac{|p + SE - \xi|^\alpha + S^\alpha}{|p + SE - \xi|^{n+1}} d\xi dS \\ &\leq (n^2 + 5n) H_\alpha(f) \int_0^{|p-q|} \int_{\omega_n} \frac{\rho^\alpha + S^\alpha}{\rho^2} d\rho dS \\ &= \omega_n (n^2 + 5n) H_\alpha(f) \int_0^{|p-q|} \left\{ \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{|p-q|}{2} \right)^{\alpha-1} + S^\alpha \left(\frac{|p-q|}{2} \right)^{-1} \right\} dS \end{aligned}$$

$$= \omega_n (n^2 + 5n) H_\alpha(f) \left(\frac{2^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \frac{2}{1+\alpha} \right) |p-q|^\alpha$$

又 $x \in K$ ナル限リ

$$D_m \int_{K-K'} \{f(\xi) - f(p)\} v(x, \xi) d\xi = \int_{K-K'} \{f(\xi) - f(p)\} D_m v(x, \xi) d\xi$$

デアルカラ、

$$|[2]| = \left| \int_0^{|p-q|} \frac{\partial}{\partial E} \int_{K-K'} \{f(\xi) - f(p)\} D_2 v(p+SE, \xi) d\xi ds \right|$$

$$\leq (n^2 + 5n) H_\alpha(f) \int_0^{|p-q|} \int_{K-K'} \{ |p+SE-\xi|^\alpha + s^\alpha \} \left(\frac{R}{|\xi-x_0|} \right)^{n-2} \frac{d\xi ds}{|p+SE-\xi|^{n+1}}$$

$$\leq (n^2 + 5n) H_\alpha(f) \int_0^{|p-q|} \int_{K-K'} \frac{|p+SE-\xi|^x + s^x}{|p+SE-\xi|^{n+1}} d\xi ds$$

$$\leq \omega_n (n^2 + 5n) H_\alpha(f) \left(\frac{2^{1-x}}{1-x} + \frac{2}{1+x} \right) |p-q|^\alpha$$

最後ニ

$$|[3]| = |f(q) - f(p)| \left| \int_{K-K'} D_2 K(q, \xi) d\xi \right|$$

$$\leq H_\alpha(f) |p-q|^\alpha \left| \int_{K-K'} D_2 K(q, \xi) d\xi \right|$$

デアルカラ、

$$\left| \int_{K-K'} D_2 K(q, \xi) d\xi \right| \leq M$$

トナル様ナ。 α, n ノミニ關シテ定メラル常数 M ノ取レル事ヲ示セバスベテガ完了スル訣デアルガ、ソレハ $\overline{K'} < K$ ナル場合ニハ極メテ容易デアル 即チ

$$\left| \int_{K-K'} D_2 K(q, \xi) d\xi \right| = \left| \int_{K-K'} D_2 v(q, \xi) d\xi + \int_{K-K'} D_2 v(q, \xi) d\xi \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \left| D_2 \int_K \chi(q, \xi) d\xi - D_2 \int_{K'} \chi(q, \xi) d\xi + \int_K D_2 u(q, \xi) d\xi - \int_{K'} D_2 u(q, \xi) d\xi \right| \\
&= \left| -\frac{\omega_n \cos(E, E')}{n} + \frac{\omega_n \cos(E, E')}{n} + 0 - \int_{K'} D_2 u(q, \xi) d\xi \right| \\
&= \left| \int_{K'} D_2 u(q, \xi) d\xi \right|
\end{aligned}$$

$D_2 u(q, \xi)$ が ξ の函数トシテハ K 内デ *harmonic* デ $\overline{K'} \subset K$ ナル事ニ注目スレバ 平均性ニヨリ.

$$\int_{K'} D_2 u(q, \xi) d\xi = \frac{\omega_n}{n} |p-q|^n \cdot D_2 u(q, x)$$

故ニ $x \neq x_0$ ナラバ

$$\begin{aligned}
\left| \int_{K-K'} D_2 u(q, \xi) d\xi \right| &= \frac{\omega_n |p-q|^n}{n} |D_2 u(q, x)| \\
&\leq \frac{\omega_n |p-q|^n}{n} \left(\frac{R}{|x-x_0|} \right)^{n-2} \frac{n+1}{|q-x|^n} \leq \left(1 + \frac{1}{n} \right) \omega_n \frac{|p-q|^n}{|q-x|^n} \\
&= \left(1 + \frac{1}{n} \right) \omega_n 2^n
\end{aligned}$$

$x = x_0$ ナラバ $D_2 u(q, x) = 0$ デアルカラ 上ノ結果ハ $x = x_0$ デアツテモ適用スル.

之デ 一般 $\overline{K'} \subset K$ ナラバ

$$\begin{aligned}
\left| D_2 u(p) - D_2 u(q) \right| &\leq \left\{ \frac{4(n+1)}{\alpha} + 2(n^2+5n) \left(\frac{2^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \frac{2}{1+\alpha} \right) \right\} \\
&\quad + \frac{1}{n} + \left(1 + \frac{1}{n} \right) 2^n \{ H_\alpha(f) |p-q|^\alpha \}
\end{aligned}$$

=アル事ヲ認識シテ置イテ 一般ノ場合 (即チ必ズシモ $\overline{K'} \subset K$ デナイ場合) モ結局ハ上ノ場合ニ帰着出来ル事ヲ示ス事ニシマス.

$p, q \in K$ ガ任意ニ與ヘラレクトキ, 先ツ線分 $\overline{px_0}, \overline{qx_0}$ 上ニソレソレ点 p_0, q_0 ヲ取ツテ

$$\left. \begin{array}{l} |p - p_0| \\ |p_0 - q_0| \\ |q - q_0| \end{array} \right\} \leq |p - q|$$

且ツ p_0, q_0 ニ對シテハ前ノ結果ガ適用出來ル様ニスル。此様ナ p_0, q_0 ノ取
レル事ハ次ニ確メラレル。即チ

1) $|p-x_0|, |q-x_0|, \text{共} \leq |p-q|$ ナルトキハ p_0, q_0 トシテ
タラモ x_0 自身ヲ取ル

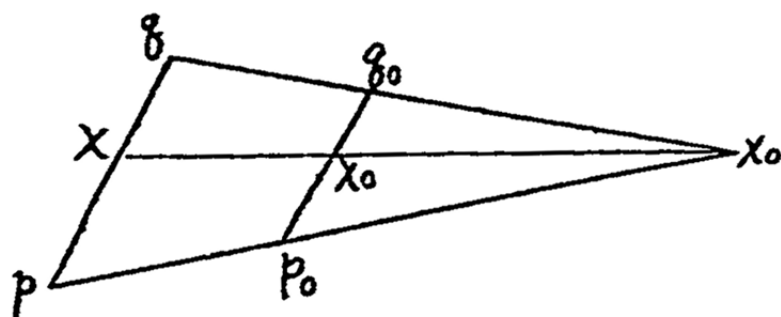
2) 其他ノ場合ハ假ニ $|p-x_0| \geq |q_0-x_0|$ トスル (サウシテモ一般性ハ失ハレナイ). 其時 $|p-x_0| > |p-q_0|$

故=, p_0 ヲ線分 $\overline{pX_0}$ 上ニ $|p-p_0|=|p-q|$ ナル如ク取ル.

80 八線分 $\overline{820}$ 上 =

$$|q - q_0| / |p - p_0| = |q - x_0| / |p - x_0|$$

ナル如ク取ル(即チ $\triangle p q x_0$ ノ平面ニ於テ $\overline{pq}$ ト $\overline{p_0 q_0}$ トガ平行ナル如ク取ル.



$$|p - p_0| = |p - q| \quad |p_0 - q_0| = |p - q|$$

$$|g - g_0| \leq |p - g|$$

デアルカラ、 P_0, Q_0 ニ對シテ前ノ結果ノ適用出來ル事ヲ示セバヨイ。 P_0, Q_0 ノ中点ヲ X_0 トスレバ、 X, X_0, X_0 ハ一直線上ニアツテ、

$$|x_0 - x_0| + |p_0 - q_0| = |x_0 - p_0| + |p_0 - p| = |x_0 - p| < R$$

デアルカラ、 X_0 ヲ中心トスル半径 $|p_0 - q_0|$ ノ球ハ 其境界モ共ニ K 内ニアル。

即ち p_0, q_0 ニツ イテハ前ノ 結果ガ適用出来ル.

上ノ様ニ p_0, q_0 ヲ定メタナラバ、ソレゾレ線分 $\overline{pp_0}, \overline{qq_0}$ 上ニ点列

$p_1, p_2, \dots, q_1, q_2, \dots$

ヲ

$$\left. \begin{aligned} |p - p_m| &= \frac{1}{2^m} |p - p_0| \\ |q - q_m| &= \frac{1}{2^m} |q - q_0| \end{aligned} \right\}, m = 1, 2, \dots$$

ナル如ク取ル。 p_m, q_m ハ m ガ増セバ限リナク p, q ニ近ヅク。

コレヲノ点列ノ相隣ル二点

$$p_{m-1}, p_m, \quad m = 1, 2, \dots \quad \text{及ビ}$$

$$q_{m-1}, q_m, \quad m = 1, 2, \dots$$

ニ對シテハ スベテ前ノ結果ノ適用出來ル事明白デアル。

前ノ結果ニヨレバ $D_2 u(x)$ ハ K ニ於テ連ヅクデアルカラ、任意ノ $\varepsilon > 0$ ニ對シ、

$$\left. \begin{aligned} |D_2 u(p) - D_2 u(p_m)| \\ |D_2 u(q) - D_2 u(q_m)| \end{aligned} \right\} < \varepsilon$$

ナル如キ m ガ存在スル。其時、

$$\begin{aligned} |D_2 u(p) - D_2 u(q)| &= |D_2 u(p) - D_2 u(p_m)| + \sum_{i=1}^m |D_2 u(p_i) - D_2 u(p_{i-1})| + \\ &\quad + |D_2 u(p_0) - D_2 u(q_0)| + \sum_{i=1}^m |D_2 u(q_{i-1}) - D_2 u(q_0)| + \\ &\quad + |D_2 u(q_m) - D_2 u(q)| \\ &< 2\varepsilon + CH^\alpha(f) \left\{ \sum_{i=1}^m |p_i - p_{i-1}|^\alpha + |p_0 - q_0|^\alpha + \sum_{j=1}^m |q_{j-1} - q_j|^\alpha \right\} \\ &= 2\varepsilon + CH^\alpha(f) \left\{ \sum_{i=1}^m \left(\frac{|p - p_0|}{2^i} \right)^\alpha + |p_0 - q_0|^\alpha + \sum_{i=1}^m \left(\frac{|q - q_0|}{2^i} \right)^\alpha \right\} \\ &\leq 2\varepsilon + CH^\alpha(f) |p - q|^\alpha \left(1 + 2 \sum_{i=1}^m \left(\frac{1}{2^\alpha} \right)^i \right) \end{aligned}$$

但シ

$$\begin{aligned} C &= \frac{4(n+1)}{\alpha} + 2(n^2 + 5n) \left(\frac{2^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \frac{2}{1+\alpha} \right) + \\ &\quad + \frac{1}{n} + \left(1 + \frac{1}{n} \right) 2^n \end{aligned}$$

デアル。

$$1 + 2 \sum_{i=1}^m \left(\frac{1}{2^\alpha} \right)^i \leq \frac{2}{1 - \frac{1}{2^\alpha}} - 1 = \frac{2^\alpha + 1}{2^\alpha - 1}$$

デアルカラ

$$|D_2 u(p) - D_2 u(q)| < 2\varepsilon + \frac{2^\alpha + 1}{2^\alpha - 1} CH_\alpha(f) |p - q|^\alpha$$

$\varepsilon > 0$ ハ任意デアルカラ $|D_2 u(p) - D_2 u(q)| = \frac{2^\alpha + 1}{2^\alpha - 1} CH_\alpha(f) |p - q|^\alpha$
即チ $D_2 u$ ハ K ニ於テ α -Hölderienne デアツテ.

$$H_\alpha(D_2 u) \leq \frac{2^\alpha + 1}{2^\alpha - 1} CH_\alpha(f)$$

Q. E. D

§5. Reference / 結語及ビ補ヒ

自分が参照シタ論文ノ主ナルモノハ:—

1) 福原満洲雄氏: ポテンシャル論ニ関スル Müntz ノ定理
(“函数方程式” 5, 6 (昭和14年))

2) H. Müntz: Zum Randwertproblem der partiellen
Differentialgleichungen der Minimalflächen
(Crelle J. 139 (1911), p52~77)

3) A. Korn: Sur les equations de Elasticité (An-
nales de l'École norm sup, (3), 1907 p 1-75
特ニ p.27-42).

Müntz ハ2次元デ Korn ハ3次元デヤツテアル. 上ノ Korn ノ論文
ハ結局 Green. ノ函数ノ代リニ elementary solution ノ入ツタ

$$\bar{u}(x) = -\frac{1}{\omega_n} \int_G \gamma(x, \xi) f(\xi) d\xi$$

ニツイテ

$$H_\alpha(D_2 \bar{u}) = K H_\alpha(f) + K' \|f\|$$

ノ如キ關係ヲ出シテアル. G ハ境界ガ相当素直ナ有界領域デアル.

上掲(4)ノ証明 (§4) ニ於テ, [1] [1'], [2] [2'] ノ評價ノ仕方ハ此ノ
Korn ノ論文ニアル方法ヲ模倣シタモノデアリマス.

[3]ノ評價ノ仕方ハ Kornトハ独立ニ我々ガ試ミタモノデアリマス。

J. Schauderニ從フト、1907年ノ A. Kornノ論文以來多クノ人ニ
ヨツテ Mintz型ノ定理ノ証明ガナサレテアルヲシク。實際 *Encyklopädie
der math. Wissen. Bd. II 3. Heft 3 (Lichtenstein) p. 286-287*
ヲ見ルト：—

値域 G ガ Bh -classニ属シ(有界トスル)、 $f(z)$ ガ G ニ介ケテ α -Hölderienne ($0 < \alpha < 1$)ナルトキ、 $G(x, z)$ ヲ G ニ對スル Greenノ函数トス
レバ、

$$u(x) = -\frac{1}{\omega_n} \int_G G(x, z) f(z) dz$$

ニツキ $D_\alpha u$ ガ又 α -Hölderienne デ。

$$H_\alpha(D_\alpha u) \leq A_1 \|f\| + A_2 H_\alpha(f). \quad A_1 > 0, A_2 > 0$$

ナル關係成立ツ事ガ書カレテアリ。之ニ關シテハ、上掲 Mintzノ論文ノ外ニ

4) A. Korn, *Über Minimalflächen, deren Randkurven wenig von ebenen Kurven abweichen.*

(*Ber. Abhandlung, 1909. Anhangs p1-37.*)

ヲ見ル様ニト指示シテアリマスガ、残念ナ事ニハ当理学部ノ図書室ニハ此 *Abhandlung*ノ丁度此年ノアタリガ缺ケテ居テ見ル事ガ出来マセン。トユカオ
持台セノ処デ足ラレルナラバ、何カ参考ニナル事ガアルト考ヘマス。

此本カニ Schauderノ言フ様ナドノ様ナ論文ガアルノカ現在未ダ知リマセン。

終リニ臨ミ、南雲教授ヨリ多クノ有益ナル御忠告ヲ受ケマシタ事ニ對シ厚ク感
謝ノ意ヲ表シマス。