



Title	単項化定理ノ証明ニツイテ
Author(s)	淡中, 忠郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1949, 2(13), p. 441-444
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75267
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

133. 單項化定理ノ証明ニツイテ

(東北大) 淡中 忠郎 (1948. 11. 30)

群論化サレタ單項化定理ノ証明ノ現在最も簡潔ナモノハ殊永氏ニヨルモノデア
ルガ巧妙過ギテとりつくガヨクワカラナカッタノデ 感賞ヲ機会ニ多少吟味ノ結

果, "形式的"ニハ少シ短クナツタノデ御報告シ度イ。勿論本質的ニハ全然同ジ証明デアルガ, 群極大ノ事トカ, 次数にてあるニ関スル意味ヲ省略スルコトガ出来ルノデ, 直接証明トシテ又章ガ短カイト云フ点ダケガ取り得デアル。

ウチノ群 $\mathcal{A}$ -ベ $\mathcal{A}$ る体, $\mathcal{U}$ ラソノ交換子群(従ツテ $\mathcal{A}$ -ベ $\mathcal{A}$ る群), $\mathcal{T} = \mathcal{G}/\mathcal{U}$ ノ元素ヲ $\sigma, \tau, \dots$ トシテ $\mathcal{G}/\mathcal{U}$ ノ代表ヲ $S_1=1, S_\sigma$ トスレバ,

$$\prod_{\sigma} D_{\sigma, \tau} = 1, \quad (D_{\sigma, \tau} = S_\sigma S_\tau S_{\sigma\tau}^{-1})$$

トナルコトガ求ムル結果デアル。

$$S_\sigma \mathcal{U} S_\sigma^{-1} = \mathcal{U}^\sigma \text{ ト置ケバ結合性カラ}$$

$$D_{\sigma_1, \tau} D_{\sigma\tau, \rho} = D_{\tau, \rho}^\sigma D_{\sigma, \tau\rho}$$

$\sigma \neq 1$ ニ對シテ記号 A_σ ヲ對應サセ,

$$\bar{\mathcal{U}} = \left(\prod_{\sigma} A_\sigma^{c_\sigma} \right) \mathcal{U} \quad (\mathcal{U} \in \mathcal{U})$$

ノ集合 $\bar{\mathcal{U}}$ ヲ結合

$$\bar{\mathcal{U}} \bar{\mathcal{U}}' = \prod_{\sigma} A_\sigma^{c_\sigma + c'_\sigma} \mathcal{U} \mathcal{U}'$$

ニヨリ $\mathcal{A}$ -ベ $\mathcal{A}$ る群ニスル。但シ

$$\prod_{\sigma} A_\sigma^{c_\sigma} \mathcal{U} = 1 \iff c_\sigma = 0, \quad \mathcal{U} = 1.$$

$\bar{\mathcal{U}}$ ノ自己同型 $\bar{\mathcal{U}} \rightarrow \bar{\mathcal{U}}^\tau$ ヲ, $\mathcal{U}$ ノ元素ニツイテハ $\bar{\mathcal{U}}^\sigma = S_\sigma \mathcal{U} S_\sigma^{-1}$,

A_τ ニツイテハ $A_\tau^\sigma = A_\tau^{-1} A_{\sigma\tau} D_{\sigma\tau}^{-1} =$ ヨリ定義スル。但シ $A_1 = 1$ トシテ置ケバ A_τ^σ ハアツユル場合ニ意味ヲ持ツ。コノ時

$$(1) \bar{\mathcal{U}}^1 = \bar{\mathcal{U}}, \quad (2) (\bar{\mathcal{U}}^\tau)^\sigma = \bar{\mathcal{U}}^{\sigma\tau},$$

$$(3) (\bar{\mathcal{U}}_1 \bar{\mathcal{U}}_2)^\sigma = \bar{\mathcal{U}}_1^\sigma \bar{\mathcal{U}}_2^\sigma$$

上式デ(2)ガ本質的デ

$$\begin{aligned} (A_\tau^\sigma)^\tau &= (A_\tau^{-1} A_{\sigma\tau} D_{\sigma\tau}^{-1})^\tau \\ &= (A_\sigma A_{\sigma\tau}^{-1} D_{\sigma\tau}) (A_\tau^{-1} A_{\sigma\tau\rho} D_{\sigma\tau\rho}^{-1}) D_{\tau, \rho}^{-\tau}, \end{aligned}$$

$$A_\tau^{\sigma\tau} = A_{\sigma\tau}^{-1} A_{\sigma\tau\rho} D_{\sigma\tau\rho}^{-1}$$

及ビ結局ニ述ベタ結合性カラ出ル。

サテ問題ノ式ヲ変形スレバ

$$\prod_{\sigma} D_{\sigma, \tau} = \prod_{\sigma} A_\sigma^{-1} A_{\sigma\tau} A_\tau^{-\sigma} = \prod_{\sigma} A_\tau^{-\Sigma \sigma} = A_\tau^{-\Sigma \sigma}$$

従ツテ

$$A_{\tau}^{\sum \sigma} = A_{\tau}^{\Gamma} = 1$$

が求ムル等式ト同値デアル。

今任意ノ τ デ

$$A_{\tau}^{\Delta} = 1 \quad (\text{但シ } \Delta = \sum C_{\sigma} \sigma)$$

ナラバ

$$A_{\tau}^{\sigma} = A_{\sigma}^{-1} A_{\sigma \tau} D_{\sigma \tau}^{-1} \equiv A_{\sigma}^{-1} A_{\sigma \tau} \pmod{\mathcal{U}}$$

デアルカラ。

$$1 = A_{\tau}^{\Delta} \equiv \prod_{\sigma} A_{\sigma}^{-C_{\sigma}} A_{\sigma \tau}^{C_{\sigma}} \equiv \prod_{\sigma} A_{\sigma}^{-C_{\sigma} + C_{\sigma \tau} - 1}$$

従ツテ $-C_{\sigma} + C_{\sigma \tau} - 1 = 0$ ($\sigma \neq \tau$) の $\tau = \sigma$ トスレバ $C_{\sigma} = C_1$ ト

ナルカラ $\Delta = C_1 \sum \sigma = C_1 \Gamma$ 。

即チ $A_{\tau}^{\Delta} = 1$ (τ 任意) ナラバ $\Delta = C\Gamma$ ノ形デアル。

次ニ $\mathcal{U}$ ノ任意ノ交換子ヲ作レバ、

$$\begin{aligned} & (S_{\sigma} u_1)(S_{\tau} u_2)(S_{\sigma} u_1)^{-1}(S_{\tau} u_2)^{-1} \\ &= u_1^{\tau - \sigma \tau} u_2^{\sigma \tau - \tau} D_{\sigma \tau} S_{\sigma \tau} (D_{\tau \sigma} S_{\tau \sigma})^{-1} \\ &= u_1^{\sigma - \tau \tau} u_2^{\sigma \tau - \tau} D_{\sigma \tau} D_{\tau \sigma}^{-1} \\ &= u_1^{\tau - \sigma \tau} u_2^{\sigma \tau - \tau} A_{\sigma}^{\tau - 1} A_{\tau}^{1 - \sigma} \end{aligned}$$

デアルカラ $\mathcal{U}$ ノ交換子群 $\mathcal{U}$ ノ元素ハ $\bar{u}^{1-\sigma}$ カラ生成サレタ群 $\bar{\mathcal{U}}^{1-\sigma} = \bar{\mathcal{U}}$ スル。

アーベル群ノ形ヲ

$$\sigma_1, \dots, \sigma_k' \quad (\sigma_i' \text{ノ次数 } e_i, e_1, \dots, e_k = n)$$

トスレバ

$$\begin{aligned} A_{\tau}^{\sigma} &\equiv A_{\sigma}^{-1} A_{\sigma \tau} \pmod{\mathcal{U}}, \quad A_{\sigma \tau} \equiv A_{\sigma} A_{\tau}^{\sigma}, \\ A_{\sigma^2} &\equiv A_{\sigma}^{1+\sigma}, \quad \text{等々} \end{aligned}$$

カラ

$$A_{\sigma_i}^{N_i} \equiv 1 \pmod{\mathcal{U}} \quad (N_i = 1 + \sigma_i + \dots + \sigma_i^{e_i-1}).$$

次ニ $\mathcal{U}$ ノ生成元ヲ $u_1, \dots, u_k$ トスルト今迄ノ所踏カラ

$$\begin{array}{ccccccc}
 A_{\sigma_1} & A_{\sigma_2} & \cdots & A_{\sigma_k} & u_1 & \cdots & u_l \\
 \hline
 \left\{ \begin{array}{l}
 A_{\sigma_1}^{N_1} \cdots \cdots \cdots = 1 \\
 \quad A_{\sigma_2}^{N_2} \cdots \cdots \cdots = 1 \\
 \qquad A_{\sigma_k}^{N_k} \cdots \cdots \cdots = 1 \\
 \cdots \cdots \cdots u_1 \cdots \cdots = 1 \\
 \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots = 1 \\
 \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots u_l = 1
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

ノ形ノ等式カ成立スル。但シ点々ノ部分ハ上段ニ書イタ元素ノ $\sum c_\sigma (1-\sigma)$ ノ形ノ中デアル。従ツテ $A_{\sigma_1} \cdots, u_1, \cdots$ ヲ消去スルコトニヨリ (之ハ上ノ $k+l$ 個ノ等式ヲ如法的ニ書き指数ヲ係数ニ出シテ行列式論ヲ用ヒバヨイ)

$$A_\sigma^\Delta = 1$$

カ容易ニ出ル。(一旦 $A_{\sigma_i}^\Delta = 1, u_j^\Delta = 1$ トナルガ $A_{\sigma_i} \equiv A_\sigma A_\tau^\Delta(u)$ ヲ繰リ返ハセバ $A_\sigma^\Delta = 1$ ガ得ラレル)。

ココニ・

$$\Delta = \begin{vmatrix} N_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & N_k & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{vmatrix} \quad \left(\begin{array}{l} \text{点々ノ部分ハ} \\ \sum c_\sigma (1-\sigma) \text{ノ形} \end{array} \right)$$

前ニ述ベタコトカラ

$$\Delta = \sum c_\sigma \sigma = c \sum \sigma$$

デアルガ $\sum a_\sigma \sigma \rightarrow \sum a_\sigma$ ニヨリ群環ノ準同型對應ガ得ラレルカラ。

$$\begin{vmatrix} e_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & e_{k_1} & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{vmatrix} = n = c \sum 1 = cn$$

トナリ $\Delta = \Gamma$ ガ得ラレ 之ト $A_\sigma^\Delta = 1$ カラ所望ノ $A_\sigma^\Gamma = 1$ ガ証明サレル。

【終】