



Title	双計量リーマン空間に就て（Ⅴ）
Author(s)	田畑, 不二夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1949, 2(13), p. 449-452
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75269
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

135. 双計量リーマン空間に就て(V)

京師 田畑 不二夫 (1948.12.1)

□ 9.2. $\|t_{\lambda\mu}\|$ が rank 1 なる半正定形式 (従つて $t_{\lambda\mu} = t_{\lambda} t_{\mu}$) 且つ $\frac{\partial t_{\lambda}}{\partial u^{\mu}} = \frac{\partial t_{\mu}}{\partial u^{\lambda}}$ なる時は適当なる座標変換の後 $dt = du^0$; $ds^2 = S_{ab} du^a du^b$ ($a, b = 1, 2, \dots, n$) の形を探る (勿論 $|S_{ab}| \neq 0$). この双計量リーマン空間 $\mathcal{V}$ に於ては双計量がこの形を保つ特殊な座標変換は $\bar{u}^0 = u^0 + C$, $\bar{u}^e = \bar{u}^e(u^e)$ であるが, 我々の教式中に u^0 に關して現れるのは主として $\frac{d}{du^0}, \frac{\partial}{\partial u^0}$ 等の形式に於てであつて之は上の $\bar{u}^0 = u^0 + C$ なる変換に對しては不変形式と見做す事が出来るから残るは $\bar{u}^e = \bar{u}^e(u^e)$ のみか問題となる. そこで $u^0 \equiv t$ をパラメーターとする計量 $ds^2 = S_{ab}(u^e, t) du^e du^a$ を持つ n 次元リーマン空間を考へて之に對して $\bar{u}^e = \bar{u}^e(u^e)$ なる変換に對する不変式を研究する幾何學は特に以上の $\mathcal{V}$ に對する変換 $\bar{u}^{\lambda} = \bar{u}^{\lambda}(u^{\lambda})$ に關しての $(n+1)$ 次元双計量リーマン幾何學と同等である. この意味に於て原の特殊な $(n+1)$ 次元双計量リーマン空間を更めて n 次元動線素 (或は双計量) リーマン空間 $\mathcal{R}$ と稱する事が許されるであらう. $\mathcal{R}$ のテンソルを $\mathcal{V}$ のテンソルと見る時はその 0 成分が全て 0 となる事及びこの逆の云へる事は明かであるが附言して置く.

□ 6.2. $t_{\lambda\mu} U^{\lambda} U^{\mu} = 1$ なるベクトル野から □ 6. の如くして生ずる ($\mathcal{V}(U^{\lambda})$ に属する) ベクトル野を $\mathcal{V}^{\lambda}$ とする.

茲に $\mathcal{V}^{\lambda}$ に對しては $\frac{ds}{dt} = \sqrt{\frac{S_{\lambda\mu} du^{\lambda} du^{\mu}}{t_{\lambda\mu} du^{\lambda} du^{\mu}}} = \sqrt{S_{\lambda\mu} U^{\lambda} U^{\mu}}$. 即ち U^{λ} はこの

大きさが速度を表してゐると見る事が出来る事から U^λ を速度ベクトルと考える事が出来、 U^λ の野は $\gamma(U^\lambda)$ の運動を表はしてゐる(し、若し Γ が存在するときは γ の運動を表してゐると見る事が出来る)。

V^λ の変化を U^λ 方向の du^λ に就て計算すれば $dV^\lambda = \frac{\partial U^\lambda}{\partial u^\alpha} V^\alpha dt - U^\lambda \Gamma_{\beta\gamma}^\lambda U^\beta U^\gamma dt$ とあつて特に $t_{\lambda\mu} = t_\lambda t_\mu$ 且 $\frac{\partial t_\lambda}{\partial u^\mu} = \frac{\partial t_\mu}{\partial u^\lambda}$ なるときは $dV^\lambda = \frac{\partial U^\lambda}{\partial u^\alpha} V^\alpha dt$ 及 $\frac{\partial V^\lambda}{\partial u^\alpha} U^\alpha = \frac{\partial U^\lambda}{\partial u^\alpha} V^\alpha$ の形に書く事が出来る。

□ 6.3. 従つて R に於ては $\frac{\partial V^\ell}{\partial u^\alpha} U^\alpha = \frac{\partial U^\ell}{\partial u^\alpha} V^\alpha$ 即 $\frac{\partial V^\ell}{\partial u^\alpha} U^\alpha + \frac{cV^\ell}{\partial t} = \frac{\partial U^\ell}{\partial u^\alpha} V^\alpha$ 形を採る。

U^λ 方向への V^ℓ の長さの変化 $\frac{\partial S_{\ell m} V^\ell V^m}{\partial u^\alpha} U^\alpha = \left(\frac{\partial S_{\ell m}}{\partial u^\alpha} U^\alpha + S_{\ell\alpha} \frac{\partial U^\alpha}{\partial u^m} + \frac{\partial U^\alpha}{\partial u^\ell} S_{\alpha m} \right) V^\ell V^m \equiv A_{\ell m} V^\ell V^m$ であり、若し U^λ による運動が全ての長さを不変に保つ條件は U^λ に就する微分方程式 $A_{\ell m} = 0$ が解を持つ事である。 U^λ 方向への n 次元体積の変化の場合は $\frac{\partial U^\lambda}{\partial u^\alpha} + S_{\alpha\ell} U^\ell$ であつて之を 0 と置き得たる U^λ に就する方程式は一般に解を有する事から一般に非圧縮流体運動は存在する事が判る。

$$U^\lambda \text{ 方向への面積変化 } \frac{d \left| \begin{matrix} S_{ih} & S_{ik} \\ S_{j\ell} & S_{jk} \end{matrix} \right| \begin{matrix} X^h & X^k \\ Y^h & Y^k \end{matrix} \begin{matrix} X^i & X^j \\ Y^i & Y^j \end{matrix}}{\partial u^\alpha} U^\alpha$$

$$= (S_{hi} A_{kj} + S_{kj} S_{hi} - S_{kl} A_{hj} - S_{hj} A_{ki}) X^h X^i Y^k Y^j$$

であつて特に $n=3$ なるときは全ての面積変化が 0 なる事と全ての長さが 0 なる事とは運動に於て全等なる事も判る。

□ 6.2. R に於ては $V^\lambda + L_{\alpha\beta}^\lambda V^\alpha du^\beta \equiv \bar{V}^\lambda$ とする時 $\bar{V}^0 = 0$ である。一方 $\bar{V}^\ell \equiv V^\ell + L_{\alpha\beta}^\ell V^\alpha du^\beta = V^\ell + S_{\alpha\ell}^\ell V^\alpha du^\ell + S_{\alpha 0}^\ell V^\alpha dt \equiv V^\ell + dV^\ell + \delta V^\ell = (V^\ell + dV^\ell) + \delta(V^\ell + dV^\ell) = (V^\ell + \delta V^\ell) + d(V^\ell + \delta V^\ell)$ である事から $L_{\mu\nu}^\lambda$ による平行移動は $V^\ell + dV^\ell$ なる $\gamma(U^\lambda)$ に於ける Levi-Civita の平行移動と $\mathcal{L}(U^\lambda)$ n 方向への移変即変形運動との二つを合成したものと見做す事が出来る。ベクトルの始点 W^λ は $W^0, W^\ell + S W^\ell$ へと静止空間に於て運動する。以上から $\mathcal{L}(U^\lambda)$ は $\mathcal{L}(U^\lambda + du^\lambda)$ へその位移されるか、 $\gamma(U^\lambda)$ への $\delta(U^\lambda + du^\lambda)$ の展開は Levi-Civita の展開を変形させたものとして理解される。

□5.2 R に於て $t_\alpha S^\alpha = 0 = t_\alpha S'^\alpha$ なる S^λ, S'^λ を探つて $\frac{\delta S^\lambda}{\delta u^\alpha} S'^\alpha$ が *Levi-Civita* の平行移動と全じである爲の條件は計量多変にあつては $A^\lambda_{\mu\nu} = L^\lambda_{\mu\nu} + S^\lambda_\alpha t_\nu D_{\mu\alpha}$ なる形を持つ事である。且 $D_{\mu\nu} + D_{\nu\mu} = 0$ $t^\alpha D_{\alpha\nu} = 0$. 従つて □27 の測地移変の係数は $\Delta \Gamma^\lambda_{\mu\nu} = L^\lambda_{\mu\nu} + \frac{1}{2} S^\lambda_\alpha t_\nu \left(\frac{\partial S_{\alpha\epsilon}}{\partial u^\sigma} S_{\mu\epsilon} - \frac{\partial S_{\mu\epsilon}}{\partial u^\sigma} S_{\alpha\epsilon} \right) \alpha^\epsilon \alpha^\epsilon du^\nu$ ($\alpha^\alpha = \frac{du^\alpha}{ds}$) なる形に書ける事から上の條件を満足してゐる事が判る。

□28. $(u^\lambda)_0, (du^\lambda)_0$ を與へたとき之を通る基本的な曲線として

$\left(\sqrt{\frac{S_{mn} du^m du^n}{L_{mn} du^m du^n}} \right)_0 \equiv v$ なる定速測地線を考へる事が出来るならば之を $\frac{du^\ell}{dt^2} + S^\ell_{\mu\nu} \frac{du^\mu}{dt} \frac{du^\nu}{dt} - \frac{1}{2} \frac{\partial S_{mn}}{\partial t} \frac{du^m}{ds} \frac{du^n}{ds} \frac{du^\ell}{dt} = 0$ と表す。 $(u^\lambda)_0$ に於けるこの曲線の方角を $\left(\frac{du^\ell}{ds} \right)_0 = \alpha^\ell$ とすれば、この解は $u^\ell = (u^\ell)_0 + \alpha^\ell s + \frac{1}{4v} \frac{\partial S_{mn}}{\partial t} \alpha^m \alpha^n \alpha^\ell s^2 - \frac{1}{2} S^\ell_{mn} \alpha^m \alpha^n s^2 - \frac{1}{v} S^\ell_{m0} \alpha^m s^2 + \dots$ となる。ここで s, v 等を一定にして置いて α^ℓ のみを $\delta u^\ell = A^\ell$ だけ変化させれば $\delta u^\ell = A^\ell s + \frac{1}{2v} \frac{\partial S_{mn}}{\partial t} \alpha^m A^n \alpha^\ell s^2 + \frac{1}{4v} \frac{\partial S_{mn}}{\partial t} \alpha^m \alpha^n A^\ell s - S^\ell_{mn} \alpha^m A^n s - \frac{1}{v} S^\ell_{m0} A^m s + \dots$ となる。ここで α^ℓ は $S_{mn} \alpha^\ell \alpha^m = 1$ を保たせてあるから α^m 方向の測地曲線に関する $\alpha^m + \delta u^m$ 方向の夫の相対的向きを言ふ所の A^ℓ は α^m と垂直である事に注意しておく。 $\frac{\partial u^\ell}{\partial s}$ と A^ℓ とを比較して作れる $\delta A^\ell = \frac{1}{2v} \frac{\partial S_{mn}}{\partial t} \alpha^m \alpha^\ell A^n s + \frac{1}{4v} \frac{\partial S_{mn}}{\partial t} \alpha^m \alpha^n A^\ell s - S^\ell_{mn} \alpha^m A^n s - \frac{1}{v} S^\ell_{m0} A^m s$ は $(u^\lambda)_0$ で一つのベクトル野を定義するのであるが之を測地移変の共変微分は $\frac{1}{4} \frac{\partial S_{mn}}{\partial t} \alpha^m \alpha^n A^\ell ds$ となり、即ち、このベクトル野は測地移変と並行と云ふ事になる。要之任意の $(u^\lambda)_0, (du^\lambda)_0$ を與へれば、自然的に $(u^\lambda)_0$ で空間ベクトル方向野を定まり（かかる方向の集合は角を保存する事は明かである）之が測地移変と平行となると云ふのである（ $v = \infty$ 或は $ds = 0$ とすれば *Levi-Civita* の平行移動との關係がつく）。故に R に於てはかかる方向野 A^λ が u^λ, du^λ に對して与へられたとき之が平行になるやうな計量移変は（ R では空間ベクトルの平行性のみを考へればよい）測地移変に限ると云ふ結論が得られる。

□29 $(S_{\lambda\mu} + t_{\lambda\mu}) u_{\lambda\mu}$ なる計量を与へられたリーマン空間を $\mathcal{U}'$ として $\mathcal{U}'$

に於ける全てのテンソルの $\mathcal{F}(u^\lambda)$ 成分を以て作れる $\mathcal{V}'$ の部分非ホロノーム空間を $\mathcal{F}'$ とし全様にして $\mathcal{F}'$ をも考へる。部分空間論で云ふ所の $\mathcal{F}'$ の曲率テンソル $S_\mu^\omega S_\lambda^\tau S_\epsilon^\nu$; $\omega \equiv H_{\mu\lambda}^\nu = S_\mu^\omega S_\lambda^\tau \left(\frac{\partial S_\tau^\nu}{\partial u^\omega} + t^{\nu\beta} \omega_{\omega\beta} + t^{\nu\beta} T_{\tau\omega,\beta} \right)$ より作れる $H_{\mu\lambda}^\nu = S_\mu^\omega S_\lambda^\tau R_{\alpha,\omega} t^{\alpha\nu}$ となつて $H_{\mu\lambda}^\nu$ が λ, μ に関し対称なる條件は $\mathcal{F}$ がホロノームなる事である。同様的事が $t_\mu^\omega t_\lambda^\tau t_\epsilon^\nu$ に関しても云へる。

$\mathcal{F}'$ がホロノームなる時即ち $\mathcal{F}$ が存在するとき $\mathcal{F}$ の主方向は $H_{\nu\omega} \equiv \frac{1}{2} S_{\lambda,\alpha}^\omega S_{\mu;\beta}^\lambda S_\nu^\alpha S_\mu^\beta = -\frac{1}{2} S^{\alpha\beta} L^{\tau\delta} (S_{\tau\nu,\alpha} S_{\beta\omega,\delta} + \omega_{\tau\omega,\alpha} S_{\beta\nu,\delta})$ なる形に表せる。

□30. $t_{\lambda\mu} = t_\lambda t_\mu$ なるとき部分空間論に於ける第二基本テンソル $\hat{h}_{\lambda\mu} \equiv S_\lambda^\omega S_\mu^\pi t_{\omega;\pi}$ は $S_\mu^\omega S_\lambda^\alpha t^\epsilon \left[-S_{\omega\alpha,\epsilon} + \left\{ t_\epsilon \left(\frac{\partial t_\omega}{\partial u^\beta} - \frac{\partial t_\beta}{\partial u^\omega} \right) + t_\omega \left(\frac{\partial t_\epsilon}{\partial u^\beta} - \frac{\partial t_\beta}{\partial u^\epsilon} \right) + t_\beta \left(\frac{\partial t_\epsilon}{\partial u^\omega} - \frac{\partial t_\omega}{\partial u^\epsilon} \right) \right\} \right]$ となり $\hat{h}_{\lambda\mu} = \hat{h}_{\mu\lambda}$ となるのは $t_\alpha du^\alpha = 0$ が積分可能、即ち $\mathcal{F}$ が存在するときこのとき $\hat{h}_{\lambda\mu} = -t^\epsilon S_{\mu\mu,\epsilon}$ なる形をとり、之の主方向即ち部分空間論に於ける主曲率方向は □20 に於ける吾々の歪曲に異ならぬ事が判る。(時空の研究 7) (昭和23. 11. 23)