



Title	平面のアフィン変換群の位相幾何學的特徴づけ（Ⅱ）
Author(s)	寺阪, 英孝
Citation	全国紙上数学談話会. 1949, 2(13), p. 454-457
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75271
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

137. 平面のプフィン変換群の位相幾何學的特徴づけ(II)

寺 阪 英 孝 (1948. 12. 1)

§3. §2に於ける如く開線 (*offene Linie*) で一次独立を定める代りに、もつと抽象的な一次独立性については中沢氏, Haupt · Nöbeling · Pauc 三氏の研究がある (Birkhoff: *Lattice theory* 参照) なら、その定義を一部借用する.

記号は三氏のを用ひて、 $A[a, b, c]$ $U[a, b, c]$ を夫々 a, b, c が Abhängig, Unabhängig なることを表はすものとする、ここは $A[\dots], U[\dots]$ は次の公理をえたすべきものと考え、 $[A$ は U の否定):

$$I. A[a, a, b]$$

$$II. a \neq b, A[a, b, x], A[a, b, y] \rightarrow A[b, x, y]. \quad \underline{a \quad b \quad x \quad y}$$

$$III. \forall a, b (\neq), c, \text{近傍 } U(c), \exists c' \in U(c): U[a, b, c'].$$

$$IV. \forall a, b, c: U[x, b, c] \exists U(a), U(b), U(c):$$

$$a' \in U(a), b' \in U(b), c' \in U(c) \rightarrow U[a', b', c']$$

以上はラ用な一次位に關する公理で、これに交換群の公理を入れる:

V. φ は E^2 を自身に移す位相変換の連続群で

$$U[a, b, c], U[a', b', c'] \rightarrow \exists, T \in \varphi: T(a, b, c) = (a', b', c').$$

以上から $a \neq b$ なる二点 a, b を通り §2 の曲線 $L(a, b)$ の存在が証明され、従つて前の結果から φ は アフィン 変換群と同型なることが分る。

以下曲線 $L(a, b)$ の存在を証明する。

§4.

三点 (a, b, c) が どの $T \in \varphi$ によつても $U[a', b', c']$ なる三点 (a', b', c') に移せなうとき $L[a, b, c]$ と書き、そうでないとき $\text{non } L[a, b, c]$ と書く。

① $a \neq b$ なら $L[a, b, x]$ なる x は三つづつ $L[\dots]$ の關係にある。

(証) $L[a, b, x], L[a, b, y], a, b, x, y (\neq)$ とする。若しも $\text{non } L[b, x, y]$ なら $\exists T: T(b, x, y) = (b', x', y')$ ことに b', x', y' は $U[b', x', y']$ なる或る三点。すると $T(a), b', x', y'$ の中 $U[T(a), b', x']$ 又は $U[T(a), b', y']$ のいづれかが成立つ。(← II) $\therefore \text{non } L[a, b, x]$ 又は $\text{non } L[a, b, y]$ となり矛盾する。 $x = a$ 其他の場合も明か。よつて

$$a \neq b, L[a, b, x], L[a, b, y] \rightarrow L[b, x, y]$$

これより既知の如く $L[a, b, x], L[a, b, y], L[a, b, z] \rightarrow L[x, y, z]$ 且、定義 $\{x | L[a, b, x]\} = L(a, b) \cdot a, b$ を特記せず $L(a, b)$ を單に L と書くこともある。① から

$$\textcircled{2} \ll a', b' (\neq) \in L(a, b) \rightarrow L(a', b') = L(a, b) \gg$$

$$\text{又 } L[a, b, c] \rightarrow L[T(a), T(b), T(c)] \text{ 故}$$

③ $\ll L$ は $T \in \mathcal{G}$ で L に移る. 即ち $a \neq b$, $T(a, b) = (a', b')$, $T \in \mathcal{G} \rightarrow T(L(a, b)) = L(a', b')$ $\gg$

④ $\ll L$ は閉集合 $\gg$ ($\leftarrow$ IV)

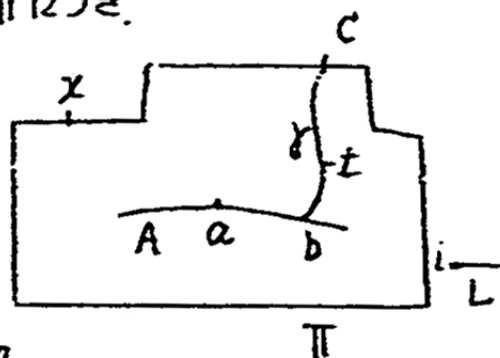
⑤ $\ll L$ の各点は $E^2 - L$ の各から到達可能 *erreichbar* である $\gg$

(証) $E^2 - L \ni p$ から直線的に到達可能な L の一点を a とする. $x \in L$ につき $T(p, a, x) = (p, x, a)$ なる $T \in \mathcal{G}$ を考へると $T(\overline{pa})$ が p から x に到達する道である.

⑥ $\ll L$ は有界な成分 *component* をもたない $\gg$

(証) L が有界な成分 A を含んだとし L と素で A を内部に含む多角形 Π を求め $a \in A$, $b \in L$, $a \neq b$, $c \in \Pi$ を定め, 各 $x \in \Pi$ につき,

$T_x(a, b, c) = (a, b, x)$ なる $T_x \in \mathcal{G}$ を考へれば T_x は x について連続な変換族をなす. C から b に到達する $E^2 - L$ の道 (⑤) を γ とすれば, $T_x(\gamma)$ は x が Π を動いたとき Π の内部を蔽いから [$\leftarrow$ 寫像度論] a



を通るものがある. 矛盾 — ⑥. ⑥ から,

⑦ $\ll E^2 - L$ は有界でない領域から成立する $\gg$

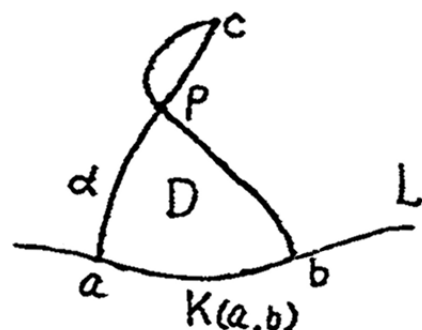
⑧ $\ll L$ の二点 a, b ($a \neq b$) に対し $a, b \in K \subset L$ なる有界連続体 K が存在する $\gg$

(証) L が有界な連続体を含むことは確. これを $T \in \mathcal{G}$ で移し, a, b を含むようにすれば可 —

定義. かかる K を *irreducible* のものを $K(a, b)$ とかく.

⑨ $\ll U[a, b, c]$ なら $T(a, b, c) = (b, a, c)$ なる $T \in \mathcal{G}$ は向きを変へる對合的変換 $T = E$ である $\gg$

(証) $T^2 = E$ は V から明. 次は C から a に到達する道を α とし $T(\alpha) \cap \alpha$ の中 a に最も近い点を p とすれば $\widehat{ap} \subset \alpha$ とその像 $T(\widehat{ap})$ とは $K(a, b)$ の一部と共になつた有界な領域 D を囲む. もしも T が向きを変へない変換ならば, 既知の如く T は 180° の廻轉と



位相的に同等であるから $D + T(D) + \widehat{ap} + T(\widehat{ap}) + p = G$ は p を含む有界領域となり、 G の境界は $\subset L$ 、これは図に反する。—

図 < L は開線 *offene Linie* である >

(証) $a, b (\neq) \in L$ を固定し向きを変える対合的変換 $S \in \mathcal{G}$ を与える ($\mathcal{G}$ の T を *transform* して得られる) と、既知の如く S の不動点集合は a, b を通る開線 L^* をつくる。 $\exists c \in L^* - L$ なら $S(a, b, c) = (a, b, c)$ 故、 $S = E$ となり矛盾するから $L^* \subset L$ 、もしも $\exists c \in L - L^*$ なら、 $E^2 - L^*$ の成分中 C を含む方からは C を L へ到達不可能故 図に反する。

よつて $L = L^*$ —

以上で目的は達せられた。

I-V の公理は直ちに E^n に拡張出来る。しかしこのとき $\mathcal{G}$ がアフィン変換群と同型かを決定するのに上記の証明法はそのままでは用ひられない。対合的変換の不動点の集合が果してどういふ時に *linear space* と *homeomorph* かな一般の E^n ぞは不明だからである。