OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	P. Alexandroff ノ問題 及ビ 空間ノ分数公理ニツイテ
Author(s)	白田, 平
Citation	全国紙上数学談話会. 1949, 2(14), p. 473-478
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75277
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

143. P. Alexandroff ノ問題及ビ空間ノ分離公理ニツイテ

（阪大） 白田 平

P. Alexandroff ハ "Bikompakte Erweiterungen topologischen Räume" (Rec. Math 47) テ completely regular, non normal space R ニ関シテソノ Čech ノ extension βR ト regular end ニヨル extension αR (§1) ハ如何ナルトキニ一致スルカヲ考ヘタガ，αR≈βR 及ビ αR ≠ βR トナル R ノ例ハ未知トシテヰル．コンデ αR ≈ βR トナル例ヲ与ヘル 更ニ R が normal デアクトモ成立スルコトガ分ル．コレニ関聯シタ分離ノ公理ヲ §2 デ述ク．

尚 コノ問題ニハ関係シナイガ二，三ノ分離公理ノ関係ヲ述ベヤウ．

§1. 定義 1.1] space X ノ regular end トハ 次ノ条件ヲ満足スル閉集合ノ family 子 デアル．

i) $\forall G \in \mathfrak{F}\ \exists G' \in \mathfrak{F}'\ \ \overline{G'} \subset G$

ii) finite intersection property ヲ持ツ

iii) i), ii) ヲ満足スル極大ナ性質ヲ持ツ．

[定義 1.2] completely regular end トハ (i) ノ代リニ ii) 及ビ iii) ト

i') $\forall G \in \mathfrak{F}\ \ \exists G' \in \mathfrak{F}\ \ G \supset G'$ 且

$X-G$ ト $\overline{G'}$ ハ連続函数ニヨリ分離サレル

即チ $f(x)=1 \quad x \in G^c = X-G$

$f(x)=0 \quad x \in \overline{G'}$

ヲ満足スル family デアル．

i') ハ i'') ト同等ナ条件デアル

i'') $\forall G \in \mathfrak{F}\ \ \exists G' \in \mathfrak{F}$

open covering $\{G, X-\overline{G'}\}$ ハ normal covering トナル

(Tukey : Convergence and uniformity in Topology P.53)

〔定義・1.3〕 αX トハ スベテノ regular end ノ system ニ次ノ様ニ topology ヲ導入シタ空間デアル.

G ヲ X ノ任意ノ開集合トスレバ コノトキ

$$\mathfrak{F}_G = \{\mathfrak{F} \mid \mathfrak{F} \in \alpha X,\ \mathfrak{F} \ni G\}$$

ヲ αX ノ open basis トスル.

(註) $\alpha' X$ トハ completely regular end ノ system ニ定義 1.3 トオナジ同様ナ topology ヲ導入シタガ空間デアル. X ガ completely regular ナラバ, コノトキ $\alpha' X$ モ completely regular トナリ, 且 $\alpha' X \approx \beta X$ ナルコトガ知ラレテキル.

次ニ簡単ナ若ンド自明デアル定理ヲ述ベル.

〔定理 1.1〕 $\alpha X \approx \beta X$ ナルタメニハ スベテノ regular end ガ completely regular end トナルコトデアル. ココデ X ハ completely regular トスル.

(註) end $\mathfrak{F}$ ヲ次ノトキ vanishing トイフ 即チ $\prod_{G \in \mathfrak{F}} G = \phi$ (空集合) 若シ vanishing デナイ αX ノ element $\mathfrak{F}$ ヲ $a = \prod_{G \in \mathfrak{F}} G$ ニ対応サセルトキ X ハ αX ノ中ニ位相的ニ含マレルコトガ分ル.

カカルモノヲ証明ニオイテ考ヘル.

(証明) 十分ナルコトハ明ラカ 逆ニ $\alpha X = \beta X$ トスル αX ハ勿論 completely regular デアルカラ $\mathfrak{F}_0 \in \alpha X$ 且 $G \in \mathfrak{F}_0$ トスレバ 「G ハ $\mathfrak{F}_0$ ノ αX ニオケル開近傍デアル. 依テ

$$\exists f : \text{有界連続函数} \qquad f(\mathfrak{F}) = 1 \quad \text{on } \overline{F}_G^{\,c}$$

$$f(\mathfrak{F}_0) = 0$$

今 $\{\mathfrak{F} \mid f(\mathfrak{F}) < \frac{1}{2}\} = U$ トスレバ U ハ $\mathfrak{F}_0$ ノ開近傍デアル 依テ

$$\exists G' : X \text{ ノ開集合} \qquad G' \subset U \text{ 且 } \overline{F}_{G'} \ni \mathfrak{F}$$

ナゼナラバ $G' \in \mathfrak{F}$ ハ $\mathfrak{F}$ ノ完全近傍系デアルカラ.

「$G' \cap X = G'$ 「$G \cap X = G$ デアルカラ

$$f(x) = 1 \quad \text{on } G^c \qquad f(x) \leqq \frac{1}{2} \quad \text{on } \overline{G'}$$

即チ G^c ト $\overline{G'}$ ハ連続函数ニヨリ分離サレルコトガ分ル.

〔例 1.1〕　$S_1 = W(w_1+1)$, $S_2 = W(w+1)$ トシ夫々順序ニヨリ ヨク知ラレテヰル Topology ヲ入レル. 且 $S = S_1 \times S_2$ $T = S - (w_1, w)$ トスル. コノトキ βT ト αT ヲ云フ.

ココデ T ハ completely regular, nm normal デアルコトハ既知. ソコデ lemma ヲ云フ.

(lemma) V_1, V_2 ヲ T ノ開集合デ 次ノ条件ヲ満足スルモノトスル.

i) $\overline{V_1}^T \supset \overline{V_2}^T$　　ii) $\overline{V_2}^S \ni (w_1, w) = P$

コノトキ $\exists n_0 (< w)$, $\lambda_0 (< w_1)$　$\forall \lambda \geq \lambda_0$, $n \geq n_0$

$\overline{U_2}^T \ni (\lambda, w)$ 且 $\overline{V_1}^T \ni (\lambda, n)$

〈寺阪先生ニヨル〉

(殆ンド略ラカナノデ 方針ダケヲ述ベル)

$\overline{V_2}^S \ni P$ デアルカラ P ノ任意ノ近クニ V_2 ノ点ガ非 ケアル. 依テ $\exists n_i$　$\lim_{i \to \omega} n_i = \omega$　$\exists \lambda_0$　$\forall \lambda > \lambda_0$ $\overline{U_2}^T \ni (\lambda, n_i)$ 依テ $\overline{V_2}^T \ni (\lambda, w)$ 更ニ $U_1 \supset U_2^T$ デアルカラ　$(\in n_0)$ $(\lambda > \lambda_0, n > n_0)$ $(\overline{V_1}^T \ni (\lambda, n))$

サテ コノトキ T ノ regular end $\mathfrak{F} - \{G\}$ デ $(\exists G \in \mathfrak{F})$ $(\overline{G}^S P)$ ナラバ $\overline{G}^T = \overline{G}^S$ ハ compact ナルコトヨリ $\mathfrak{F}$ ハ vanishing デハナイ. 依テ $\mathfrak{F}$ ガ $\alpha T - T$ ニ属スルタメニハ. $(\forall G \in \mathfrak{F})(\overline{G}^S \ni P)$ デナケレバナラヌ 然ルニ lemma ニヨリカカル 2ツノ $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ ヲトレバ, ソレラノ element ハ常ニ相交ハル 依テ $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_2$ デナケレバナラス 依テ $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_2$ 更ニカカル vanishing end ハ completely regular デアルコトモ lemma ヨリ容易ニ分ル 即チ,スベテノ regular end ハ completely regular end デアル. 依テ 定理 1.1 ヨリ, $\alpha T = \beta T$ デアル.

§2. Type $(\mathfrak{D} > \mathfrak{D}')$-normal space

$\mathfrak{D}$ 及ビ $\mathfrak{D}'$ ヲ アル directed system トスル

[定義 2.1] space X ノ 2ツノ fremd ナ閉集合 F, F′ ヲ $(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}')$-separated ト次ノトキニ云フ

i) $\forall \delta \in \mathfrak{G}$, $\delta' \in \mathfrak{G}'$ ヲ G_δ, $\in \delta'$ X ノ開集合

ii) $F \subset G_\delta$, $F' \subset G_{\delta'}$ 且 $G_\delta \cap G_{\delta'} = \phi$

iii) $\delta_1 < \delta_2$ $(\delta_1' < \delta_2')$ ナラバ $\overline{G}_{\delta_1} < G_{\delta_2}$ $(\overline{G}_{\delta_1'} < G_{\delta_2'})$

特ニ $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}' = N = \{1, 2, \cdots\cdots n\}$ ナルトキ N-separated ト云フ. 更ニ単ニ $F \cap F' = 0$ ノトキ 0-separated ト云フコトニ シヤウ.

[定義 2.2] space X ヲ Type $(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}')$-normal space デアルト次ノトキニ云フ.

スベテノ $(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}')$-separated ナ閉集合 F, F′ ハ (λ, λ)-separable デアルトキ ココデ入ハ有理数ノ全体デ大ト関係ニヨリ順序ヲ入レタ directed system トスル.

言ヒ換エレバ $(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}')$-separated ナ閉集合 F, F′ ハ連続函数ニヨリ分離サレルコトデアル.

特ニスベテノ N(0)-separated ナ閉集合ガ (λ, λ) separated デアルトキ type N(0)-normal space ト云フコトニスル.

$\mathfrak{G}_1 \supset \mathfrak{G}_2$ 且 $\mathfrak{G}_1' \supset \mathfrak{G}_2'$ ナラバ type $(\mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_2')$-normal space ハ type $(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_1')$-normal space デアル. type 0-normal space ハ普通ノ normal space デアリ且コレニヨリ一般ノ抽象空間ノ分離ガ出来ル.

今. 有用ナノハ type N-normal space デアル.

[定理 2.1] X ガ Type N-normal 且 completely regular space ナラバ $\alpha X \approx \beta X$

(証明) 予ヲ任意ノ regular end トスル. コノトキ completely regular end ニナルコトヲ云ヘバヨイ. regular end デアルコトヨリ

$\forall G \in \mathfrak{F}$ ヲ G_i $i = 1, 2, \cdots\cdots 2n+1$

$G_i \in \mathfrak{F}$ $\overline{G}_i \subset G_{i-1}$ 且 $\overline{G}_1 \subset G$

コノトキ G_{2n+1} ト G^c ハ N-separated 依テ 連続函数ニヨリ分離サレル.

[系] スベテノ Δ-refinement ヲ有スル X, finite open covering ハ normal covering テアルトキ $\alpha X = \beta X$ トナル.

T_2-space デ non normal ヨ type 2-normal space

証明 [01] デ 0 以外ハ皆近ノ近傍ヲ有シ 0デハ 0ヲ含ムアル区間ヨリ $\frac{1}{n}$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ ヲ除イタモノトスレバヨイ.

§3. normal 以上ノ space ニ関シテ.

今等デ 位相空間ノ fully normality ニ就イテ デ completely normal デモ fully normal デナイ例 及ビ fully normal デ perfectly normal デナイ ヲ挙ゲタ. 今 perfectly normal デモ fully normal デナイ例トシテ

[例 3.1] $W(\omega_1)$ ハ 求メルモノデアル

(証明) コレガ perfectly normal デアルコトハ明ラカ. fully normal デナイコトハ 任意ノ open covering $\mathfrak{U}$ ヲトレバ. $\mathfrak{U}^*$ ハ アル $\{\mu / \mu > \mu_0\}$ ヲ含マネバナラヌコトヲ云ヘバヨイ.

若シ シカラザレバ $(\forall \mu)(\exists \mu_1(\mu) > \mu)$ $(\mu' (\mu) \in S(\mu, \mathfrak{U}))$ トナル. 任意ノ μ_1 ヲトリ $\mu_2 = \mu'(\mu_1)$, $\mu_{n+1} = \mu'(\mu_n)$ トスル. $\{\mu_n\}$ ハ アル $\mu' < \omega_1$ ニ収斂スル $\mu' \in U \in \mathfrak{U}$ トスレバ $\exists n_0$ $n_0 \leq n$ ナラバ $\mu_n \in U$

依テ $\mu_{n_0+1} \in S(\mu_{n_0}, \mathfrak{U})$ コレハ μ_{n_0+1} ノ定義ニ反スル.

更ニ perfectly normal ヨ fully normal デ metric space デナイ例トシテ

[例 3.2] 実数ノ集合デ 点 a ノ近傍トシテ $\{x / b < x \leq a\}$ ナル集合ヲトル. コレハ periectly normal 更ニ Lindeeof ノ定理ガ成立スル 依テ スベテノ open covering ハ countable sub-covering ヲ含ム. コノトキ 弥田氏ノ定理 perfectly normal

space ニオイテ countable open covering ハ normal デアル ヨリ コノ space ガ fully normal デアルコトガ分ル.

次ニ 分離ノ公理トシテ

A, B ガ $\overline{A}\cdot B + \overline{B}\cdot A = 0$ ナラバ ヨ f : 連続

$A \subset \{x \mid f(x) > 0\}$ $B \subset \{x \mid f(x) < 0\}$ $|f(x)| \leqq 1$

ヲ満足スル空間ヲ考ヘル コレヲ今 semi-perfectly normality ト名付ケルコトニシヤウ. コノトキ容易ニ分ルヤウニ semi perfectly normal ナラバ completely normal, perfectly normal ナラハ semi perfectly normal デアルコトガ分ル. 更ニ completely normal space ガ semi perfectly normal デアルタメニ必要且ツ十分ナ條件ハ スベテノ閉集合ノ開包ガ G_δ 集合デアルコトガ分ル.