



Title	P進数体ニオケル或ル群ニツイテ
Author(s)	國吉, 秀夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1949, 2(14), p. 481-486
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75279
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

145. p 進数体ニオケル或ル群ニツイテ

國 吉 秀 夫 (東北大) 1940. I. 3

§1. k ヲ p 進数体、 Ω/k ヲ有限拡大トシ $G(k/\Omega) = (A \in \Omega; N_{\Omega/k} A = 1)$ トシマス。 Ω/k *abel* ノトキ、 $G(k/\Omega)$ ニツイテ、局所類体論ノ *(Anordnungsatz)* = 類似シタ定理ガ成立シマス。之ハ渋谷先生ガ紙上熟語会 236 ニテ示サレタモノデスガ、其所デハ $G(k/\Omega)$ ノ構造ニツイテノ定理ガ載ッテ居リマス。之ハ中山、松島兩先生ニヨリ、一般ノ場合ニ拡張サレマシタガ、(247, 252, 255) 此所デハ Ω/k *abel* ノトキ、ソノ *Galois* 群 $G(k/\Omega)$ トノ關係ニツキ 述ベシタイト思ヒマス。

S. Sasaki. Sci. Rep. Tohoku Imp. Univ., 29. (1940). 219-267.

Ω ノ不変系ヲ $(n_1, \dots, n_r)$ n_{i+1}/n_i トシマス。ソレニ對シテ
 $\Omega = \mathfrak{F}_1 \times \dots \times \mathfrak{F}_r$, $\mathfrak{F}_i = \{\sigma_i\}$ ハ n_i 次 巡回群
 ト分解致シマス。ソノトキ、

$$G(k/\Omega) / \Omega_{\Omega}^{1-\lambda} = A_2 \times A_3 \times \dots \times A_r$$

但シ、 $A_i \cong \mathfrak{F}_i \times \mathfrak{F}_{i+1} \times \dots \times \mathfrak{F}_r$.

$\Omega_{\Omega}^{1-\lambda}$ ハ $\omega^{1-\lambda}$, $\omega \in \Omega$, $\lambda \in \Omega$ 生成スル群 トス。

ナル關係ガ成立シマス。之ヲ証明致シマス。

淡中先生ノ結果ニヨレバ、 $G(k/\Omega) = \left(\frac{a_{\sigma_i, \tau}}{a_{\tau, \sigma_i}}, \Omega_{\Omega}^{1-\lambda} \right)$ デアルガ、

σ_i, τ ハ Ω ノ元 スベテヲ取ル必要ナク、(1)ノ σ_i = 閉スルモノノミ
 = テ十分デアル。即チ、

$$\text{L.1. } G(k/\Omega) = \left(\frac{a_{\sigma_i, \tau}}{a_{\tau, \sigma_i}}, \Omega_{\Omega}^{1-\lambda} \right) \quad \text{但シ、}(a_{\sigma_i, \tau}) \text{ハ Exponent}$$

ガ $(\Omega:k)$ ナル Ω/k ノ因子団トス。

証明 — 歸納法ニヨル。 $\Omega = \mathfrak{F}_1 \times \dots \times \mathfrak{F}_{r-1}$ トシ、之ニ對スルニテ N トス。

$$N_{\Omega/k}(A) = 1 \quad \text{ナル } A \text{ ヲトレバ}$$

$$(3) \quad N_{\Omega/N}(A) = n^{1-\sigma_r} \quad n \in N$$

$n' \equiv a_{\sigma_i, \tau} \pmod{N_{\Omega/N}} \quad \text{デアルガ、} \sigma_i = \prod_{i=1}^r \sigma_i^{x_i}$ トスレバ、

$$(4) \quad \equiv \prod_{i=1}^r a_{\sigma_i, \tau}^{x_i} \pmod{N_{\Omega/N}}$$

$$(3), (4) \text{ヨリ、} N_{\Omega/N}(A) = \left(\prod_{i=1}^r a_{\sigma_i, \tau}^{x_i}, n \cdot N_{\Omega/N}(\omega) \right)^{1-\sigma_r}$$

$$= \prod_{i=1}^r (a_{\sigma_i, \tau}^{1-\sigma_r})^{x_i} \quad N_{\Omega/N}(\omega^{1-\sigma_r}) = N_{\Omega/N} \left(\prod_{i=1}^r \left(\frac{a_{\sigma_i, \tau}}{a_{\tau, \sigma_i}} \right)^{x_i} \omega^{1-\sigma_r} \right)$$

故ニ 歸納法ノ假定ニヨリ

$$G(k/\Omega) = \left(\frac{a_{\sigma_i, \tau}}{a_{\tau, \sigma_i}}, \Omega_{\Omega}^{1-\lambda} \right)$$

次ニ、簡單ナ場合ニ關シテ、Lemmaヲ述ベル。 H/k Abelヲ拡大、

Galois群 $\mathfrak{G}$ ノ不変系ヲ (n_1, n_2) n_2/n_1 トス。

$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2$ $\mathfrak{G}_i = \{\tau_i\}$ ハ n_i 次ノ巡回群。

(a') ヲ Exponent ガ $(H:k)$ ナル H/k ノ因子団トスレバ L.1ヨリ、

$$G(k/H) = \left(\frac{a'_{\tau_1, \tau_2}}{a'_{\tau_2, \tau_1}}, H_{\mathfrak{G}}^{1-\lambda} \right)$$

デアルガ、 $\frac{a'_{\tau_1, \tau_2}}{a'_{\tau_2, \tau_1}} \pmod{H_{\mathfrak{G}}^{1-\lambda}}$ ノ位数ニツイテ、次ノ Lemmaガ
 成立スル。

$$L.2. \quad \left(\frac{a'_{\tau_1, \tau_2}}{a'_{\tau_2, \tau_1}} \right)^x \in H_{\mathfrak{f}}^{1-\lambda} \quad \text{ナラバ} \quad n_2 | x.$$

証明. $\mathfrak{f}_i$ = 対応スル中間体ヲ H_i トスル.

$$\left(\frac{a'_{\tau_1, \tau_2}}{a'_{\tau_2, \tau_1}} \right)^x \in H_{\mathfrak{f}}^{1-\lambda} \quad \text{ナル故} \quad \left(\frac{a'_{\tau_1, \tau_2}}{a'_{\tau_2, \tau_1}} \right)^x = k_1^{1-\tau_1} k_2^{1-\tau_2}$$

両辺ノ N_{H/H_2} ヲ作ル.

$$\text{左辺} = N_{H/H_2} \left(\frac{a'_{\tau_1, \tau_2}}{a'_{\tau_2, \tau_1}} \right)^x = \left(a'^{1-\tau_1}_{\tau_1, \mathfrak{f}_2} \right)^x = (a'^x_{\tau_1, \mathfrak{f}_2})^{1-\tau_1}$$

$$= (a'^x_{\tau_1, \mathfrak{f}_2} \cdot N_{H/H_2} k_1^x)^{1-\tau_1}$$

$$\text{右辺} = N_{H/H_2} (k_1^{1-\tau_1})$$

$$\therefore (a'^x_{\tau_1, \mathfrak{f}_2})^{1-\tau_1} = (N_{H/H_2} \theta)^{1-\tau_1}$$

$$(5) \quad \therefore a'^x_{\tau_1, \mathfrak{f}_2} = \alpha \cdot N_{H/H_2} \theta \quad \alpha \in \mathcal{K}.$$

$$\text{然ルニ} \quad \alpha \in N_{H/H_2}^* \quad \text{ナル.} \quad (1)$$

$\alpha \in H_2$ ト考ヘテ. $\mathcal{K} =$ 対応スル Norm ハ

$$N_{H_2/\mathcal{K}} \alpha = \alpha^{n_1} = (\alpha^{\frac{n_1}{n_2}})^{n_2} \in N_{H/\mathcal{K}}^*$$

故ニ 局所類体論ノ *Verschiebungssatz* = ヲリ.

$$(6) \quad \alpha \in N_{H/H_2}^*$$

従ッテ (5), (6) ヲリ.

$$a'^x_{\tau_1, \mathfrak{f}_2}, \mathfrak{f}_2 \in N_{H/H_2}^* \quad \therefore \tau_1^x = 1$$

再ビ $\Omega/\mathcal{K} =$ 是リ L.1 ノ記号ヲ用ヒル.

$$L.3. \quad \left(\frac{a_{\sigma_i, \sigma_j}}{a_{\sigma_j, \sigma_i}} \right)^{n_j} \in \Omega_{\mathcal{K}}^{1-\lambda} \quad \text{但シ} \quad i < j$$

証明 $\mathfrak{f}_j$ = 対応スル体ヲ $\mathbb{Z}_j$ トスレバ. $\Omega/\mathbb{Z}_j$ ハ巡回体. 一方

$$\begin{aligned} N_{\Omega/\mathbb{Z}_j} \left(\frac{a_{\sigma_i, \sigma_j}}{a_{\sigma_j, \sigma_i}} \right)^{n_j} &= (a_{\sigma_j, \mathfrak{f}_j}^{n_j})^{1-\sigma_i} (a_{\sigma_j, \mathfrak{f}_j}^{n_j} N_{\Omega/\mathbb{Z}_j} c)^{1-\sigma_i} \\ &= N_{\Omega/\mathbb{Z}_j} c^{1-\sigma_i} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{a_{\sigma_i, \sigma_j}}{a_{\sigma_j, \sigma_i}} \right)^{n_j} = c^{1-\sigma_i} a^{1-\sigma_j} \in \Omega_{\mathcal{K}}^{1-\lambda}$$

1) 此ノ下ノ 此ノ証明ハ淡中先生ニ依ル. 元ノ証明ハ又ニ 複雑デアツツ.

定理. $G(k/\Omega) \cong \Omega^{\lambda-\lambda} = A_2 \times A_3 \times \dots \times A_r$

$$A_i = Z_{i,i+1} \times Z_{i,i+2} \times \dots \times Z_{i,r}$$

$$Z_{i,j} \text{ は } \frac{a_{\sigma_i, \sigma_j}}{a_{\sigma_j, \sigma_i}} \pmod{\Omega^{\lambda-\lambda}} = \text{ヨリ生成サレ } \sigma_j = \text{同型,}$$

証明 (7) $\prod \left(\frac{a_{\sigma_i, \sigma_j}}{a_{\sigma_j, \sigma_i}} \right)^{x_{i,j}} \in \Omega^{\lambda-\lambda}$

ナル関係式アリトスル. 任意ノ $i < j$ ヲトリ. $\sigma_i \times \sigma_j$ ヲ除イタ他ノ通.
積因子ヲ 取'. ソレニ対スル体ヲ Z トシ. (7) ノ両辺ノ $N_{\Omega/Z}$ ヲ作ル.

$$N_{\Omega/Z} \left(\frac{a_{\sigma_p, \sigma_c}}{a_{\sigma_c, \sigma_p}} \right) = 1 \quad \begin{matrix} c \neq i, j \\ p \neq i, j \end{matrix}$$

$$N_{\Omega/Z} \left(\frac{a_{\sigma_i, \sigma_j}}{a_{\sigma_j, \sigma_i}} \right) = a_{\sigma_i, \sigma_j}^{1-\lambda}$$

デアルカラ (7) ハ

$$\left(\frac{a_{\sigma_i, \sigma_j}^{x_{i,j}}}{a_{\sigma_j, \sigma_i}^{x_{j,i}}} \right) \in Z_{\sigma_i \times \sigma_j}^{1-\lambda}$$

トナルガ. Chevalley = ヨリ. $(a_{\sigma_i, \sigma_j}^{x_{i,j}})$ ハ 多元体 = 生成スル Z/k
ノ因子団デアル. 故ニ. L.2 ヨリ.

$$n_j \mid x_{i,j}$$

従ッテ L.3 ヨリ. (7) = テ $\frac{a_{\sigma_i, \sigma_j}}{a_{\sigma_j, \sigma_i}}$ ナル項ハ本質的ニハ現ハレナイ.

i.e. (7) ナル式ハ. 本質的ニハ存在シナイ. q.e.d.

此ノ定理ノ直接ノ結論トシマシテ. 松島先生ノ結果 (談話 1113) ガ得テ
マス.

系 Ω/k Abel ノトキ $G(k/\Omega) = \Omega^{\lambda-\lambda}$ ナラバ Ω/k ハ
巡回拡大デアル.

Ω/k ヲ Galois 拡大トスルトキ. 此ノ結果ハソノママ成立致シマ
セン. 例ヘバ Galois 群 G ガ. G/G' . G' 共ニ巡回群ノヤウナ
Galois 拡大 Ω/k ラトリマス.

$$G(k/\Omega) = \Omega^{\lambda-\lambda}$$

ナルコトガ証明サレマス.

§2 今マデハ *Abel* 拡大 = 限ッテキマシタガ、次ニ 任意ノ有限拡大 $K/\mathbb{Q}$ ノ $G(\mathbb{Q}/K)$ ニツイテ 考ヘテ見マス。 $\mathbb{Q}$ 上ノ無限 *Abel* 拡大 $\bar{\mathbb{Q}}$ ニ対スル局所環体論ノ群 $H(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ ハ次ノ如ク定義サレマス。

$$H(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) = \bigcup N_{\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}}^*$$

此所デ A ハ $\mathbb{Q}$ 上ノ 有限次 *Abel* 拡大デ $\bar{\mathbb{Q}}$ ノ 部分体トナルモノ全体ヲ密グ トシマス。

L.4 $\mathbb{Q}$ 上ノ最大 *Abel* 拡大体ヲ $\bar{\mathbb{Q}}$ トスレバ

$$H(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) = 1$$

証明. $\alpha \in H(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, $\alpha = p^{\varepsilon} \cdot e$ 但シ $(p) = \mathfrak{p}$ ハ $\mathbb{Q}$ ノ素 *ideal* e ハ 単数トス。ソトキ $\varepsilon = 0$ デアル。

$\varepsilon \neq 0$ ナラバ、素数全体ノナス最乗ヲ E トシ $|\beta| > |\varepsilon|$ ナル 整数 β ヲトリ $p^{\beta} \in E$ トノ生成スル群ヲ H_0 トスレバ、明カニ $(\mathbb{Q} : H_0) < \infty$ 故ニ H_0 上ノ環体 A , ガ存在スル $\alpha \in H(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \subset N_{A/\mathbb{Q}}^* = H_0$ デアルガ H_0 ノ構成法カラ、 $\alpha \in H_0$ トナリ、矛盾トナル。 $\therefore \varepsilon = 0$ 。

$\alpha = 1$ 若シ $\alpha \neq 1$ ナラバ 十分大ナル n ニ対シテ、

$$\alpha \not\equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^n}$$

$$\text{ソトキ } e_n \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^n}$$

ナル e_n ノナス乗法群ヲ E_n トシ、 $H_n = (P, E_n)$ トスレバ、明カニ H_n 上ノ環体 A_n ガ存在シ $\alpha \in H_n$ デナクテバナラス。一方 ソノ作り方ヨリ、 $\alpha \in H_n$ デ 矛盾トナル。

定理. 2. $K/\mathbb{Q}$ ヲ有限拡大トスレバ、

$$G(\mathbb{Q}/K) = H(K\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$$

証明 明カニ $G(\mathbb{Q}/K) \subset H(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$

定ニ $\theta \in H(K\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ ヲトリ $\theta = N_{K/\mathbb{Q}}(\theta')$ トスル

$\theta' = 1$ ナラバ $\mathbb{Q}$ 上ノ *Abel* 拡大 A ガ存在シテ (L.4)

$$\theta' \in N_{A/\mathbb{Q}}^*$$

A ヲ十分大キクトッテミテ見エヘナイカラ、 $A \subset K$ トスル。ソトキ A/K ハ *Abel* 拡大。

$$\textcircled{11} \in N_{A/K}^*$$

故 = *Verschlingungsatz* =ヨリ

$$N_{K/E} \textcircled{11} = \bar{\sigma} \in N_{A/E}^*$$

之ハ矛盾デアル。

$$G = 1$$

q. e. d.

此ノ直接ノ結論トシテ 次ノコト方云ヘマス。

系. E 上ノ有限拡大体ヲ K . K 上ノ *abel* 拡大体ヲ A トスレバ A/E ガ *abel* 拡大トアルタメニ 必要 十分 条件ハ.

$$G(E/K) \subset N_{A/K}^*$$