



Title	Bauerノ定理ニ関スルニ三ノ反例ニツイテ
Author(s)	淡中, 忠郎; 増田, 勝彦
Citation	全国紙上数学談話会. 1949, 2(14), p. 500-502
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75285
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

151. Bauerノ定理ニ関スル二三ノ反例ニツイテ

(東北大) 淡中 忠郎, 増田 勝茂 (1949.4.11)

筆者ノ内ノ一人(増田)ガ Bauerノ定理ヲ拡張ショウト試ミタガ, 大抵ノ
場合不成立ニナルノデソレニツイテ述ベテ見ル.

L ヲ有限次代数々体, K/L ヲソノ有限拡大体トスルトキ $\mathcal{A}^p(K/L), \mathcal{A}^c(K/L)$
トハ夫々 K デ 完全ニ分解スル L ノ 素イである, 及び少アモーツ相対次数 1ノ
因子ヲモン L ノ 素イであるノ集合トスル. K^* ヲ K ヲ含ム最小ノ 可分体ト
スル時.

Bauerノ定理: $\mathcal{A}^p(K/L) \subset \mathcal{A}^c(\Omega/L) \iff \Omega \subset K^*$

(但シ尤モハ Kronecker式定度 0 ナル f ヲ除外シテヨイ)

$\sigma \in \Sigma(K/k)$ とす。 k_σ は K の完備体 k_σ と一致スル。
 従つて $K k_\sigma = k_\sigma$ 同様 K/k の共軛体 $K^{(i)}$ に対しても
 $K^{(i)} k_\sigma = k_\sigma$ デアルカラ $K^* k_\sigma = k_\sigma$ 即ち $\sigma \in \Sigma(K^*/k)$ 。
 従つて $\Sigma(K/k) = \Sigma(K^*/k)$ トナル。

定理 1. $\Sigma(K/k) \subset \Sigma(\Omega/k) \rightarrow \Omega^* \subset K^*$

定理 2. $\Omega^* \subset K^* \rightarrow \Sigma(K/k) \subset \Sigma(\Omega/k)$

定理 1. の証明. $\Sigma(K/k) \subset \Sigma(\Omega/k) \rightarrow \Omega^* \subset K^*$ ヲ
 群論ノ言葉ニ直シテ見ル。 Ω, K 両方ヲ含ム Galois 体 P デ。 $\Omega,$
 K カ 部分群 F, H ニ属スルモノトスル。 P/k ノ Galois 群 G ノ任意
 ノ巡回部分群 $\{ \sigma \}$ ヲ分解群ニ持ッ様ナ P ノ素イであるハ無限ニ存在スル。
 例ヘバ $\{ \sigma \}$ ニ対応スル体 K_σ ノ 絶対一次デ且ツ P デモ素イである ヲ
 採レバヨイ。問題ノ論理式ノ左辺ハ

$$\sigma \in F \rightarrow \exists \tau_\sigma \in G; \quad \tau_\sigma^{-1} \sigma \tau_\sigma \in H$$

右辺ハ勿論 $F^* \subset H^*$ トナル。 コレニ F^*, H^* ハ F, H ノ共軛
 群ノ共通部分ヲ示ス。

反例トシテハ

G : 4次ノ交代群

F : $\{ 1, (2)(34), (13)(24), (14)(23) \}$

H : $\{ 1, (2)(34) \}$

ヲ考ヘレバヨイ。

$$(123)^{-1} (13)(24)(123) = (12)(34)$$

$$(132)^{-1} (14)(23)(132) = (12)(34)$$

デアルカラ論理式ノ左辺ガ満足サレルガ

$$F^* = F \quad H^* = \{ 1 \}$$

デアルカラ $F^* \subset H^*$ ハ 成立シナイ。

定理 2. の証明. 三次ノ対称群 G ノ 部分群 $F = \{ 1, (12) \},$

$H = \{ 1, (123), (132) \}$ ニ属スル体ヲ Ω, K トスレバヨイ。

$$F^* = \{1\} \quad H^* = H \quad \text{デアルカラ} \quad \Omega^* \ni K^* = K.$$

然シ (12)ノ共範元ハ H ニハナラナイ。

定理3. K ノアル法 $\alpha \in S_{\alpha K}$ ニ対シテ $S_{\alpha K}$ ノスベテノ β ガ
 $\alpha \in (K/\mathbb{Q})$ ニ属シテモ $K/\mathbb{Q}$ ハ必ズシモ類体ニハナラナイ。

証明. 定理1ノ例ノ $\Omega/\mathbb{Q}$ ニ対スル Fünfer ヲ $\mathbb{Q}$ トスレバ、 $S_{\mathbb{Q}}$ 内
 ノ β ハ Ω デ完全ニ分解スル。従ッテ作り方カラ何レカマ方ノ因数ガ K デ
 完全ニ分解スルコトカラ $\beta \in S_{\mathbb{Q}}$ 然ルニ $K/\mathbb{Q}$ ハ Galois 体ニ
 モナツテ居ラナイ。 (終)

$S_{\alpha K}$ 内ノ β ガ $\mathbb{Q}^p(K/\mathbb{Q})$ ニハイル場合ニハ $K/\mathbb{Q}$ ガ 類体ニナルコ
 トハ Bauer 氏定理カルカ。

定理4. $\alpha \in (K/\mathbb{Q})$ ガ 密度0ヲ除クスベテノ β ヲ含メバ $K = \mathbb{Q}$ 。

K ヲ Galois 体 $P/\mathbb{Q}$ ノ部分体デアルトスレバ 定理ハ任意ノ $\sigma \in G$
 ニ対シ $\sigma \in H$ ノ様ナ σ ガ存在スレバ $G = H$ ナルコトニ
 帰着スル。

コノ群論的ナ定理ガ Warden : Moderne Algebra IIニ
 アルコトヲ岩澤氏カラ教ヘテ戴イタ。

ソノ他 K 内 $= 1$ ノ n 巾根ガ全部含マレル時、殆ンドスベテノ β 連体デ
 $\omega \in K$ ガ n 乗数ナラバ、 ω ハ K 内デ n 乗数ニナルコトハヨク知ラレ
 テキルガ、 K 内 $= 1$ ノ n 巾根ガ含マレヌ時ハ 成立シナイ。最近 Wang
 ガ Greenwald ノ例ノ定理ノ反例トシテタヘタモノガ丁度ソウナッテ
 キル。ソノ例デハ $2^4 = 16$ 2連体 R_2 ヲ除ケバ常ニ8乗数トナッテ
 キル。 以上。