OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Bauerノ定理ニ関スルニ三ノ反例ニツイテ
Author(s)	淡中, 忠郎; 増田, 勝彦
Citation	全国紙上数学談話会. 1949, 2(14), p. 500-502
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75285
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

151. Bauer ノ定理ニ関スル二三ノ反例ニツイテ

(東北大) 淡中忠郎, 増田勝友 (1949.4.11)

筆者ノ内ノ一人(増田)ガ Bauer ノ定理ヲ拡張シヨウト試ミタガ, 大体ノ場合不成立ニナルノデソレニツイテ述ベテ見ル.

$\mathfrak{k}$ヲ有限次代数々体, $K/\mathfrak{k}$ ヲソノ有限拡大体トスルトキ $\mathfrak{P}(K/\mathfrak{k})$, $\mathfrak{p}(K/\mathfrak{k})$ トハ夫々 Kデ完全ニ分解スル $\mathfrak{k}$ノ素イデアル, 及ビ少クモ一ツ絶対次数1ノ因子ヲモツ $\mathfrak{k}$ノ素イデアルノ集合トスル. K^* ヲ Kヲ含ム最小ノガウア体トスル時.

Bauer ノ定理: $\mathfrak{P}(K/\mathfrak{k}) \supset \mathfrak{p}(\Omega/\mathfrak{k}) \rightleftarrows \Omega \supset K^*$

(但シ尤迄ハ Kronecker 式定義ノナルヲヲ除外シテヨイ)

今 $\mathfrak{P} \in \mathfrak{P}(K/k)$ トラバ $k_{\mathfrak{P}}$ ヲ含ム K ノ完備体ハ $k_{\mathfrak{P}}$ ニ一致スル。
従ッテ $K k_{\mathfrak{P}} = k_{\mathfrak{P}}$　同様ニ K/k ノ共軛体 $K^{(\sigma)}$ ニ対シテモ
$K^{(\sigma)} k_{\mathfrak{P}^\sigma} = k_{\mathfrak{P}^\sigma}$ デアルカラ $K^* k_{\mathfrak{P}} = k_{\mathfrak{P}}$　即チ $\mathfrak{P} \in \mathfrak{P}(K^*/k)$.
従ッテ　$\mathfrak{P}(K/k) = \mathfrak{P}(K^* \cdot k)$ トナル。

定理 1.　$\mathfrak{N}(K/k) \cap \mathfrak{N}(\Omega/k) \rightarrow \Omega^* \cap K^*$

定理 2.　$\Omega^* \cap K^* \rightarrow \mathfrak{N}(K/k) \cap \mathfrak{N}(\Omega/k)$

<u>定理 1. ノ証明.</u>　$\mathfrak{N}(K/k) \cap \mathfrak{N}(\Omega/k) \longrightarrow \Omega^* \cap K^*$ ヲ
群論ノ言葉ニ直シテ見ル. Ω, K 両方ヲ含ム Galois 体 P デ, Ω, K ガ 部分群 F, H ニ属スルモノトスル. P/k ノ Galois 群 G ノ任意ノ巡回部分群 $\{\sigma\}$ ヲ分解群ニ持ッ様ナ P ノ素いであるハ無限ニ存在スル。
例ヘバ $\{\sigma\}$ ニ対応スル体 K_σ ノ 絶対一次デ且ッ P デモ素ナいである ヲ採レバヨイ. 問題ノ論理式ノ左辺ハ

$$\sigma \in F \rightarrow \exists \tau_\sigma \in G; \quad \tau_\sigma^{-1} \sigma \tau_\sigma \in H$$

右辺ハ勿論　$F^* \subset H^*$ トナル.　コゝニ F^*, H^* ハ F, H ノ共軛群ノ共通部分ヲ示ス.
反例トシテハ

G :　4次ノ交代群
F :　$\{1, (2)(34), (13)(24), (14)(23)\}$
H :　$\{1, (2)(34)\}$

ヲ考ヘレバヨイ.

$$(123)^{-1} (13)(24)(123) = (12)(34)$$
$$(132)^{-1} (14)(23)(132) = (12)(34)$$

デアルカラ論理式ノ左辺ガ満足サレルガ

$$F^* = F \qquad H^* = \{1\}$$

デアルカラ　$F^* \subset H^*$　ハ成立シナイ.

<u>定理 2. ノ証明.</u>　三次ノ対称群 G ノ 部分群 $F = \{1, (12)\}$,
$H = \{1, (123), (132)\}$ ニ属スル体ヲ Ω, K トスレバヨイ.

$F^* = \{1\}$　　$H^* = H$　デアルカラ　$\Omega^* \supset K^* = K$.

然シ (12) ノ共軛元ハ H ニハナラナイ.

定理 3.　k ノアル法 $\mathfrak{M}$ ノ $S_{\mathfrak{M}}$ ニ対シテ $S_{\mathfrak{M}}$ ノスベテノ $\mathfrak{z}$ ガ $\mathfrak{N}(K/k)$ ニ属シテモ K/k ハ必ズシモ類体ニハナラナイ.

証明.　定理 1 ノ例ノ Ω ノ k ニ対スル Führer ヲ $\mathfrak{f}$ トスレバ、$S_{\mathfrak{f}}$ 内ノ $\mathfrak{z}$ ハ Ω デ完全ニ分解スル. 従ッテ作リ方カラ何レカ一方ノ因数ガ K デ完全ニ分解スルコトカラ $\mathfrak{z} \in S_{\mathfrak{f}}$　然ルニ K/k ハ Galois 体ニモナッテ居ラナイ.　〔終〕

$S_{\mathfrak{M}}$ 内ノ $\mathfrak{z}$ ガ $\mathfrak{N}(K/k)$ ニハイル場合ニハ K/k ガ類体ニナルコトハ Bauer ノ定理カル分ル.

定理 4.　$\mathfrak{N}(K/k)$ ガ密度 0 ヲ除クスベテノ $\mathfrak{z}$ ヲ含メバ $K = k$.

K ヲ Galois 体 P/k ノ部分体デアルトスレバ 定理ハ任意ノ $\sigma \in G$ ニ対シ $\tau_\sigma^{-1}\sigma\tau_\sigma \in H$ ノ様ナ τ_σ ガ存在スレバ $G = H$ ナルコトニ帰着スル.

コノ群論的ナ定理ガ Waerden : Moderne Algebra II ニアルコトヲ岩澤氏カラ教ヘテ戴イタ.

ソノ他 k 内ニ 1 ノ n 巾根ガ全部含マレル時, 殆ンドスベテノ $\mathfrak{z}$ 進体デ $\omega \in k$ ガ n 素数ナラバ, ω ハ k 内デ n 乗数ニナルコトハヨク知ラレテヰルガ, k 内ニ 1 ノ n 巾根ガ含マレヌ時ハ成立シナイ. 最近 Wang ガ Greenwald ノ例ノ定理ノ反例トシテ与ヘタモノガ丁度ソウナッテヰル. ソノ例デハ $2^4 = 16$　2 進体 R_2 ヲ除ケバ常ニ 8 乗数トナッテヰル.　以上.